08 공간벡터

기하와 벡터 교과서 Review

문제 1

중심이 $A(1,\ 2,\ 3)$인 구가 평면 $2x-y+3z+5=0$과 점 H에서 접할 때 H의 좌표와 구의 반지름의 길이를 구하고 그 과정을 서술하여라.

문제 2

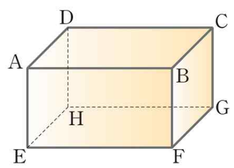
좌표공간에서 세 개의 구 $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2+2z=0$, $x^2+y^2+z^2+4x-2y=0$의 부피를 각각 이등분하는 평면의 방정식을 구하여라.

문제 3

두 직선 $g_1 : \dfrac{x-1}{-5}=y=\dfrac{z-5}{2}$, $g_2 : x+3=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{-5}$의 교점과 점 $(2,\ 3,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

문제 4

오른쪽 그림과 같은 직육면체 $ABCD-EFGH$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 모두 고른 것은?

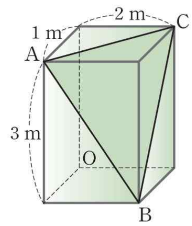


보 기
ㄱ. $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}<0$
ㄴ. $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{FA}=0$이면 사각형 $AEFB$는 정사각형이다.
ㄷ. $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{GA}=0$이면 직육면체 $ABCD-EFGH$는 정육면체이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

08 공간벡터

문제 5 가로의 길이가 $2\mathrm{m}$, 세로의 길이가 $1\mathrm{m}$, 높이가 $3\mathrm{m}$인 직육면체 모양의 석고 기둥이 있다. 조각을 하기 위해 오른쪽 그림과 같이 석고 기둥을 세 꼭짓점 A, B, C를 지나는 평면으로 잘랐을 때, 꼭짓점 O와 평면 ABC 사이의 거리를 구하여라.



문제 6 구 $x^2+y^2+z^2=4$와 평면 $z=-1$이 만나서 생기는 원을 C라고 하자. 구 $x^2+y^2+z^2=4$와 x축을 포함하는 평면 α가 만나서 생기는 원이 원 C와 오직 한 점에서 만날 때, 평면 α의 한 법선벡터를 $\vec{n}=(a,\ 3,\ b)$라고 하자. 이때 b^2-a^2의 값을 구하여라.

문제 7 평면 α가 평면 $x+2y-2z+1=0$에 평행하고, 원점과 평면 α 사이의 거리가 3일 때, 평면 α의 방정식을 모두 구하여라.

문제 8 좌표공간에 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 2,\ -5)$, $\mathrm{B}(3,\ -1,\ -4)$, $\mathrm{C}(2,\ 1,\ -1)$이 있다. 점 A에서 점 B를 향해 빛을 쏘았더니 점 B를 통과하여 점 C를 포함하는 평면 α에 반사되어 다시 점 A로 돌아왔다. 이때 평면 α의 방정식을 구하여라.
(단, 빛의 입사각과 반사각의 크기는 같다.)

08 공간벡터

기하와 벡터 교과서 Review

문제 9

다음의 직선 l과 평면 α가 서로 평행할 때, 실수 a의 값을 모두 구하여라.

$$l : \begin{cases} x=(a-2)t-1 \text{(단, } t\text{는 실수)} \\ y=(a+2)t+1 \\ z=2t \end{cases}$$

$$\alpha : (a-2)x+(a+2)y-8z=10$$

문제 10

좌표공간에서 두 구

$$x^2+y^2+z^2=9,$$

$$(x+2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=16$$

이 만나서 생기는 원을 포함하는 평면을 α라고 하자. 평면 α와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.

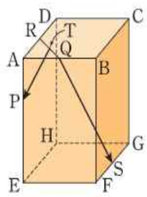
문제 11

구 $x^2+(y-4)^2+z^2=4$ 위의 점 중 y좌표가 3인 임의의 점 P에 대하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}$의 종점 S가 나타내는 도형의 둘레의 길이를 구하여라.

(단, O는 원점이다.)

문제 12

오른쪽 직육면체에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}=4$, $\overline{\mathrm{AE}}=6$일 때, 모서리 AE를 1 : 2로 내분하는 점을 P, 모서리 AB, AD, FG의 중점을 각각 Q, R, S라고 하자. 선분 QR의 중점을 T라고 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{TP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QS}}$를 구하는 풀이 과정과 답을 써라.



08 공간벡터

기하와 벡터 교과서 Review

문제 13

점 $\mathrm{A}(-2,\ 1,\ -4)$에서 두 평면 $3x+y+z-4=0$과 $x-y+z-2=0$의 교선에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, $\overline{\mathrm{AH}}$의 길이를 구하는 풀이 과정과 답을 써라.

문제 14

두 구

$$x^2+y^2+z^2=9,$$
$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4$$

가 만나서 생기는 원을 포함하는 평면을 α라고 하자. 평면 α와 zx평면이 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.

문제 15

세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 1)$, $\mathrm{B}(2,\ 1,\ 2)$에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m\overrightarrow{\mathrm{OA}}+n\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ \ (0\le m\le 1,\ 0\le n\le 1)$$

를 만족시키는 점 P가 존재하는 영역의 넓이를 구하여라.

문제 16

평면 α: $2x+y+3z=5$에 대하여 같은 쪽에 두 점 $\mathrm{A}(4,\ 3,\ 5)$, $\mathrm{B}(2,\ -3,\ 2)$가 있다. 다음을 구하여라.

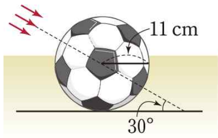
(1) 점 A의 평면 α에 대한 대칭점 C의 좌표

(2) 평면 α 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값

08 공간벡터

기하와 벡터 교과서 Review

문제 17 오른쪽 그림과 같이 햇빛이 지면과 $30°$의 각을 이루면서 반지름의 길이가 $11\ \mathrm{cm}$인 축구공을 비추고 있다. 이때, 이 축구공의 그림자의 넓이를 구하여라. (단, 축구공은 구로 생각한다.)



문제 18 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 3,\ -1)$, $\mathrm{B}(a,\ b,\ c)$에 대하여 yz평면이 선분 AB를 $2:1$로 내분하고, 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점이 x축 위에 있을 때, 점 B의 좌표를 구하여라.

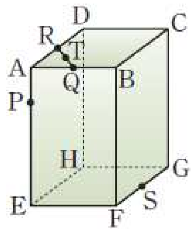
문제 19 점 $\mathrm{P}(2,\ 1,\ -1)$을 지나고 xy평면, yz평면, zx평면에 동시에 접하는 구는 2개 있다. 이 두 구의 중심 사이의 거리를 구하여라.

08 정적분의 활용

기하와 벡터 교과서 Review

문제20

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AD}=4$, $\overline{AE}=8$인 직육면체에서 모서리 AE를 $1:3$으로 내분하는 점을 P, 모서리 AB, AD, FG의 중점을 각각 Q, R, S라고 하자. 선분 QR의 중점을 T라고 할 때, $\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{QS}$의 값을 구하여라.



문제 21

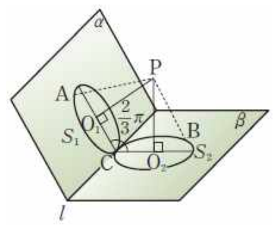
두 직선

$$\frac{x-1}{2}=-y+1=\frac{3-z}{4},\quad x-2=y+1=\frac{a-z}{3}$$

가 만날 때, 상수 a의 값을 구하여라.

문제22

두 평면 α, β의 교선을 l이라고 하자. 평면 α 위에 있는 원 S_1과 평면 β 위에 있는 S_2는 반지름의 길이가 모두 2이다. 그림과 같이 원 S_1과 원 S_2는 점 C에서 직선 l과 접한다. S_1의 중심 O_1을 지나고 평면 α에 수직인 직선과 S_2의 중심 O_2를 지나고 평면 β에 수직인 직선이 만나는 점을 P라고 하자. $\angle O_1CO_2=\frac{2}{3}\pi$일 때, S_1 위에 있는 임의의 점 A와 S_2 위에 있는 임의의 점 B에 대하여 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$ 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.



01 이차곡선

기하와 벡터 교과서 Review

문제23

두 직선

$$l : x-1=\frac{y+1}{2}=\frac{z+4}{2}$$

$$m : \frac{x+1}{2}=y-1=z+2$$

의 교점을 A라고 하자. 두 직선 l, m과 평면 $x+y-z=4$의 교점을 각각 B, C라고 할 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.

문제24

평면 $\alpha : x+y+2z=4$ 위의 점 A(1, −1, 2)를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C가 α 위에 있다. 점 P$(2, 2, 3)$에서 원 C 위에 있는 점까지의 최단 거리를 d라고 할 때, d^2의 값을 구하여라.

문제25

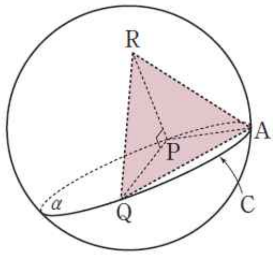
직선 $l : \frac{x+1}{2}=y-4=\frac{z-8}{-3}$ 위의 두 점 A, B와 점 C$(1, -1, 3)$에 대하여 삼각형 ABC가 정삼각형이 될 때, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 구하여라.

08 공간벡터

기하와 벡터 교과서 Review

문제26

좌표공간에서 구 $S: x^2+y^2+z^2=4$와 평면 $\alpha: y-\sqrt{3}z=2$가 만나서 생기는 원을 C라고 하자. 원 C 위의 점 A$(0, 2, 0)$에 대하여 원 C의 지름의 양 끝점 P, Q를 $\overline{AP}=\overline{AQ}$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 평면 α에 수직인 직선이 구 S와 만나는 또 다른 점을 R라고 하자. 삼각형 ARQ의 넓이를 s라고 할 때, s^2의 값을 구하여라.

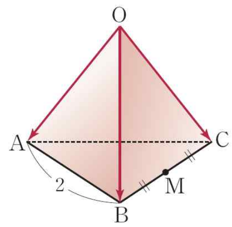


문제27

오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정사면체에서 변 BC의 중점을 M이라고 할 때,

$$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OM}\quad(0\le t\le 1)$$

을 만족시키는 점 P가 그리는 도형의 길이를 구하여라.



문제28

좌표공간에서 두 벡터 $\vec{a}=(-1,\ 2,\ 4)$, $\vec{b}=(2,\ 1,\ 3)$에 대하여 벡터 $\vec{p}$가 등식 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$을 만족시킬 때, 벡터 $\vec{p}$의 종점 P가 그리는 도형의 겉넓이를 구하여라.

08 공간벡터

기하와 벡터 교과서 Review

〈정답 및 해설〉 기하와 벡터 – 8 원. 공간벡터

1.
주어진 구와 평면이 접하므로 $\overline{\mathrm{AH}}$와 평면은 수직으로 만난다.
따라서 $\overline{\mathrm{AH}}$의 방향벡터는 $\vec{d}=(2,\ -1,\ 3)$이고, 직선AH 의 방정식은

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{3}$$

점 H는 직선 AH와 평면 $2x-y+3z+5=0$의 교점이다.
$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{3}=t$로 놓으면
$x=2t+1,\ y=-t+2,\ z=3t+3$ ······①
①을 평면의 방정식에 대입하면
$2(2t+1)-(-t+2)+3(3t+3)+5=0$
$t=-1$
이를 ①에 대입하면 $x=-1,\ y=3,\ z=0$
따라서 점 H의 좌표는 $(-1,\ 3,\ 0)$이고, 구의 반지름의 길이는
$|\overline{\mathrm{AH}}|=\sqrt{1-(-1)^2+(2-\sqrt{3})^2+(3-0)^2}=\sqrt{14}$

2. $x+2y=0$

3.
두 직선 $g_1,\ g_2$의 교점을 P라고 하면 점 P는 직선 g_1 위에 있으므로
$\frac{x-1}{-5}=y=\frac{z-5}{2}=t$ (t는 실수)에서 점 P의 좌표를
$(-5t+1,\ t,\ 2t+5)$라고 할 수 있다.
또, 점 P는 직선 g_2 위에도 있으므로
$x+3=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{-5}$에 대입하면
$(-5t+1)+3=\frac{t-3}{2}=\frac{(2t+5)-2}{-5}$에서 $t=1$
따라서 교점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(-4,\ 1,\ 7)$
두 점 $(-4,\ 1,\ 7)$과 $(2,\ 3,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은
$\frac{x-(-4)}{2-(-4)}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z-7}{-1-7}$에서
$\frac{x+4}{3}=y-1=\frac{z-7}{-4}$

4. ②

5.
꼭짓점 O를 원점으로 하고 직육면체의 모서리를 각각 x축, y축, z축으로 하는 좌표공간에 직육면체를 놓으면 세 꼭짓점은 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 3)$, $\mathrm{B}(1,\ 2,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 2,\ 3)$ 이다.
평면 ABC의 방정식을
$ax+by+cz+d=0$ ······㉠
이라고 하면 세 점 A, B, C는 평면 위의 점이므로
$a+3c+d=0,\ a+2b+d=0,\ 2b+3c+d=0$
이를 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{2}d,\ b=-\frac{1}{4}d,$
$c=-\frac{1}{6}d,\ d=-4b$
이를 ㉠에 대입하면 평면 ABC의 방정식은
$6x+3y+2z-12=0$
따라서 원점 O와 평면 ABC 사이의 거리는

$$\frac{|-12|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{12}{7}$$

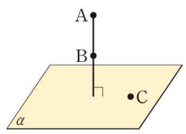
6. 27

7.
평면 $x+2y-2z+1=0$의 법선벡터가
$(1,\ 2,\ -2)$이므로 평면 α의 법선벡터는
$(1,\ 2,\ -2)$
따라서 평면 α의 방정식을
$x+2y-2z+k=0$ (k는 상수)
으로 놓을 수 있다.
이때 원점과 평면 α 사이의 거리가 3이므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=3$$

$k=\pm 9$
따라서 구하는 평면 α의 방정식은
$x+2y-2z+9=0$ 또는 $x+2y-2z-9=0$

8.
점 A에서 쏜 빛이 평면 α에 반사되어 다시 점 A로 돌아오므로 $\alpha\perp\overline{\mathrm{AB}}$이다. 따라서 평면 α의 법선벡터는



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ -3,\ 1)$
또, 평면 α는 점 $(2,\ 1,\ -1)$을 지나므로 평면 α의 방정식은
$2(x-2)-3(y-1)+(z+1)=0$
$2x-3y+z=0$

9.
직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라고 하면
$\vec{u}=(a-2,\ a+2,\ 2)$
평면 α의 법선벡터를 $\vec{n}$이라고 하면
$\vec{n}=(a-2,\ a+2,\ -8)$
직선 l과 평면 α가 평행하므로
$\vec{u}\perp\vec{n}$
즉, $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$이므로
$(a-2,\ a+2,\ 2)\cdot(a-2,\ a+2,\ -8)=0$
$(a-2)^2+(a+2)^2-16=0$
$a^2=4$
$a=\pm 2$

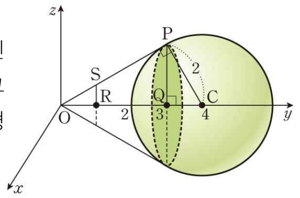
10.
두 구의 중심의 좌표는 각각
$\mathrm{C}_1(0,\ 0,\ 0)$
$\mathrm{C}_2(-2,\ 1,\ -2)$
이므로 두 구가 만나서 생기는 원을 포함하는 평면 α의 법선벡터는
$\overrightarrow{\mathrm{C_1C_2}}=(-2,\ 1,\ -2)$
또, xy평면의 법선벡터를 $\vec{n}$이라고 하면
$\vec{n}=(0,\ 0,\ 1)$
로 놓을 수 있으므로

$$\cos\theta=\frac{|0+0+(-2)\times 1|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}\sqrt{0+0+1^2}}=\frac{2}{3}$$

08 공간벡터

11.
구의 중심을 C, 점 P가 나타내는 원의 중심을 Q라고 하면 다음 그림의 $\triangle CPQ$에서 y좌표가 3인 평면과 구가 만나는 원의 반지름의 길이는

$$\overline{PQ}=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$$



점 P가 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원 위의 점이므로 $\overrightarrow{OP}$와 방향이 같고 크기가 1인 $\overrightarrow{OS}$의 종점 S가 나타내는 도형은 위의 그림에서 반지름이 $\overline{SR}$인 원이다.

$\triangle POQ$에서

$$\overline{OP}=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$$

$|\overrightarrow{OS}|=1$이므로 $\overline{PQ}:\overline{OP}=\overline{SR}:\overline{OS}$에서

$$\sqrt{3}:2\sqrt{3}=\overline{SR}:1$$

$$\overline{SR}=\frac{1}{2}$$

따라서 종점 S가 나타내는 도형의 둘레의 길이는

$$2\times\pi\times\frac{1}{2}=\pi$$

12.
점 H를 원점으로 하고, 모서리 HE, HG, HD가 각각 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 직육면체를 좌표공간에 나 타내면 오른쪽 그림과 같다.
이때
$A(4,\ 0,\ 6)$, $B(4,\ 4,\ 6)$,
$D(0,\ 0,\ 6)$, $E(4,\ 0,\ 0)$,
$F(4,\ 4,\ 0)$, $G(0,\ 4,\ 0)$
이므로
$P(4,\ 0,\ 4)$, $Q(4,\ 2,\ 6)$, $R(2,\ 0,\ 6)$,
$S(2,\ 4,\ 0)$, $T(3,\ 1,\ 6)$
$\overrightarrow{TP}=(1,\ -1,\ -2)$, $\overrightarrow{QS}=(-2,\ 2,\ -6)$
$\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{QS}=-2-2+12=8$

13.
두 평면의 방정식에서 y, z를 각각 소거하여 정리하면

$$x=\frac{-z+3}{2},\ x=-y+1$$

이므로 두 평면의 교선의 방정식은

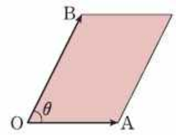
$$x=-y+1=\frac{-z+3}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x=-y+1=\dfrac{-z+3}{2}=t$라고 하면
$x=t$, $y=-t+1$, $z=-2t+3$
$H(t,\ -t+1,\ -2t+3)$이라고 하면
$\overrightarrow{AH}=(t+2,\ -t,\ -2t+7)$
벡터 $\overrightarrow{AH}$와 직선 ㉠의 방향벡터 $(1,\ -1,\ -2)$가 수직이므로
$(t+2,\ -t,\ -2t+7)\cdot(1,\ -1,\ -2)=0$
$t+2+t-2(-2t+7)=0$
$t=2$
따라서 $\overrightarrow{AH}=(4,\ -2,\ 3)$이므로
$\overline{AH}=|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{4^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{29}$

14.
두 구의 중심 $(0,\ 0,\ 0)$, $(2,\ 1,\ -2)$를 지나는 직선은 평면 α와 수직이다.
따라서 평면 α의 법선벡터는
$(2,\ 1,\ -2)$
zx평면의 법선벡터는 $(0,\ 1,\ 0)$이므로

$$\cos\theta=\frac{|1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}\sqrt{1^2}}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

15.
점 P의 자취는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$를 두 변으로 하는 평행사변형의 내부와 그 둘레이다. 두 벡터 $\overrightarrow{OA}=(1,\ 2,\ 1)$, $\overrightarrow{OB}=(2,\ 1,\ 2)$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면



$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$$

$$=\frac{2+2+2}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\sqrt{2^2+1^2+2^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\overline{OA}\times\overline{OB}\times\sin\theta=\sqrt{6}\times3\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\mathbf{3\sqrt{2}}$$

16.
(1) $C(a,\ b,\ c)$라고 하면

$$\overrightarrow{AC}=(a-4,\ b-3,\ c-5)$$

$\overrightarrow{AC}$와 평면 α의 법선벡터 $(2,\ 1,\ 3)$이 평행하므로

$$(a-4,\ b-3,\ c-5)=k(2,\ 1,\ 3)\ (k\neq0\text{인 실수})$$

$$a=2k+4,\ b=k+3,\ c=3k+5 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 $\overline{AC}$의 중점 $\left(\dfrac{a+4}{2},\ \dfrac{b+3}{2},\ \dfrac{c+5}{2}\right)$가 평면 α 위에 있으므로

$$2\times\frac{a+4}{2}+\frac{b+3}{2}+3\times\frac{c+5}{2}=5$$

$$2a+b+3c=-16 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

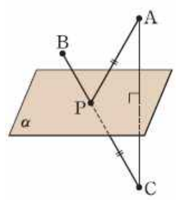
$$4k+8+k+3+9k+15=-16$$

$$k=-3$$

따라서 $a=-2$, $b=0$, $c=-4$이므로

$$\mathbf{C(-2,\ 0,\ -4)}$$

(2)



위의 그림에서

$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{CP}+\overline{BP}$$

$\geq\overline{BC}$
$=\sqrt{(-2-2)^2+3^2+(-4-2)^2}$
$=\sqrt{61}$
따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $\mathbf{\sqrt{61}}$이다.

17.
축구공의 중심을 지나는 단면의 넓이는

$\pi \times 11^2 = 121\pi$ (cm^2)

이때, 축구공의 중심을 지나는 단면과 그림자가 이루는 각의 크기는 $90° - 30° = 60°$

따라서 축구공의 그림자의 넓이를 S라고 하면

$S\cos 60° = 121\pi$

$\frac{1}{2}S = 121\pi$

$S = 242\pi$ (cm^2)

18.
$\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:1$로 내분하는 점을 P라고 하면 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}\left(\frac{2a+1}{3},\ \frac{2b+3}{3},\ \frac{2c-1}{3}\right)$

이때, 점 P는 yz평면 위에 있으므로 점 P의 x좌표는 0이다.

즉, $\frac{2a+1}{3} = 0$이므로

$a = -\frac{1}{2}$

또, $\overline{\mathrm{AB}}$를 $3:2$로 외분하는 점을 Q라고 하면 점 Q의 좌표는

$\mathrm{Q}(3a-2,\ 3b-6,\ 3c+2)$

이때, 점 Q는 x축 위에 있으므로 점 Q의 y좌표와 z좌표는 0이다.

즉, $3b-6=0$, $3c+2=0$이므로

$b=2$, $c=-\frac{2}{3}$

따라서 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}\left(-\frac{1}{2},\ 2,\ -\frac{2}{3}\right)$이다.

답 $\mathrm{B}\left(-\frac{1}{2},\ 2,\ -\frac{2}{3}\right)$

19.
점 $\mathrm{P}(2,\ 1,\ -1)$을 지나는 구의 반지름의 길이를 r라고 하면 xy평면, yz평면, zx평면에 동시에 접하므로 중심의 좌표는 $(r,\ r,\ -r)$이다.

즉, 구하는 구의 방정식은

$(x-r)^2+(y-r)^2+(z+r)^2=r^2$

이고, 이 구가 점 $\mathrm{P}(2,\ 1,\ -1)$을 지나므로

$(2-r)^2+(1-r)^2+(-1+r)^2=r^2$

위의 식을 정리하면 $3r^2-8r+6=r^2$

$2r^2-8r+6=0$

$r^2-4r+3=0$

$(r-1)(r-3)=0$

$r=1$ 또는 $r=3$

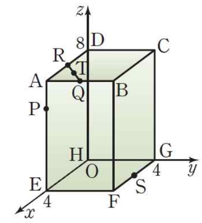
따라서 두 구의 중심의 좌표는 각각 $(1,\ 1,\ -1)$, $(3,\ 3,\ -3)$이므로 두 구의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2+\{-3-(-1)\}^2}=\sqrt{12}$

$=2\sqrt{3}$

답 $2\sqrt{3}$

20.
점 H를 원점, 세 모서리 HE, HG, DH를 각각 x축, y축, z축으로 놓으면



$\overline{\mathrm{PE}}=8\times\frac{3}{4}=6$이므로

$\mathrm{P}(4,\ 0,\ 6)$

$\overline{\mathrm{GS}}=4\times\frac{1}{2}=2$이므로 $\mathrm{S}(2,\ 4,\ 0)$

$\overline{\mathrm{AQ}}=4\times\frac{1}{2}=2$이므로 $\mathrm{Q}(4,\ 2,\ 8)$

$\overline{\mathrm{AR}}=4\times\frac{1}{2}=2$이므로 $\mathrm{R}(2,\ 0,\ 8)$

점 T는 선분 QR의 중점이므로

$\mathrm{T}(3,\ 1,\ 8)$ …… (가)

$\overrightarrow{\mathrm{TP}}=(1,\ -1,\ -2)$, $\overrightarrow{\mathrm{QS}}=(-2,\ 2,\ -8)$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{TP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QS}}$

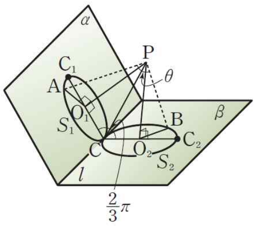
$=(1,\ -1,\ -2)\cdot(-2,\ 2,\ -8)$

$=-2-2+16$

$=12$ …… (나)

21. 2

22.



$\triangle PCO_1 \equiv \triangle PCO_2$이므로

$\angle PCO_1 = \angle PCO_2 = \frac{\pi}{3}$

$\triangle PCO_2$에서 $\frac{\overline{CO_2}}{\overline{PC}} = \cos\frac{\pi}{3}$이므로

$\overline{PC} = 4$

$\triangle PAO_1 \equiv \triangle PBO_2 \equiv \triangle PCO_2$이므로

$|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}| = 4$

두 벡터 $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|^2 = |\overrightarrow{PA}|^2 + 2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} + |\overrightarrow{PB}|^2$$
$$= 32 + 32\cos\theta$$

$\cos\theta$의 값은 세 점 A, B, C가 모두 같을 때 $\cos\theta = \cos 0 = 1$로 최대이므로

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|^2 = 64$

즉, $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$의 최댓값은 8이다.

$\cos\theta$의 값은 점 A가 $\overline{CO_1}$의 연장선과 원 S_1이 만나는 점 C_1에 위치하고 점 B가 $\overline{CO_2}$의 연장선과 원 S_2가 만나는 점 C_2에 위치할 때 최소이므로

$$\cos\theta = \cos(\angle C_1PC_2)$$
$$= \cos\frac{2}{3}\pi$$
$$= -\frac{1}{2}$$

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|^2 = 16$

즉, $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$의 최솟값은 4이다.

따라서 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$의 최댓값은 8, 최솟값은 4이다.

23.

$l: x-1 = \frac{y+1}{2} = \frac{z+4}{2} = t$로 놓으면

$x = t+1,\ y = 2t-1,\ z = 2t-4$ $\cdots$ ①

$m: \frac{x+1}{2} = y-1 = z+2 = s$로 놓으면

$x = 2s-1,\ y = s+1,\ z = s-2$ $\cdots$ ②

①, ②를 연립하여 풀면 $t=2,\ s=2$

즉, $A(3,\ 3,\ 0)$

두 직선 l, m과 평면 $x+y-z=4$의 교점을 각각 B, C라고 하면

$(t+1)+(2t-1)-(2t-4)=4,\ t=0$

즉, $B(1,\ -1,\ -4)$

$(2s-1)+(s+1)-(s-2)=4,\ s=1$

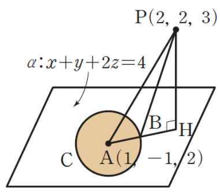
즉, $C(1,\ 2,\ -1)$

따라서 구하는 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2\sin^2\theta}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2(1-\cos^2\theta)}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2\cos^2\theta}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{36\times6-144} = 3\sqrt{2}$$

24.

다음 그림과 같이 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$$\overline{PH} = \frac{|1\times2+1\times2+2\times3-4|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \sqrt{6}$$

$$\overline{AP} = \sqrt{(2-1)^2+\{2-(-1)\}^2+(3-2)^2}$$
$$= \sqrt{11}$$

$$\overline{AH} = \sqrt{(\sqrt{11})^2-(\sqrt{6})^2} = \sqrt{5}$$

이때 $\overline{AH}$와 원 C와의 교점을 B라고 하면

$\overline{BH} = \sqrt{5}-1$

점 P에서 원 C 위의 점까지의 최단 거리 d는

$d = \sqrt{\overline{PH}^2+\overline{BH}^2}$

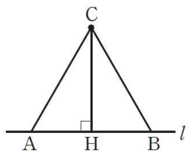
따라서 $d^2 = 6+(\sqrt{5}-1)^2 = 12-2\sqrt{5}$

25.

직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라고 하면

$\vec{u}=(2,\ 1,\ -3)$

점 $C(1,\ -1,\ 3)$에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$\frac{x+1}{2}=y-4=\frac{z-8}{-3}=t$로 놓으면

$x=2t-1,\ y=t+4,\ z=-3t+8$

점 H는 직선 l 위의 점이므로

$H(2t-1,\ t+4,\ -3t+8)$로 놓으면

$\overrightarrow{CH}=(2t-2,\ t+5,\ -3t+5)$

$\overrightarrow{CH}\perp\vec{u}$이므로 $\overrightarrow{CH}\cdot\vec{u}=0$

$4t-4+t+5+9t-15=0,\ 14t=14$

$t=1$

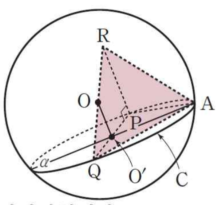
즉, 점 H의 좌표는 $H(1,\ 5,\ 5)$

따라서 무게중심의 좌표를 G라고 하면

$\overrightarrow{OG}=\frac{2\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OC}}{3}=\left(1,\ 3,\ \frac{13}{3}\right)$

26.

오른쪽 그림에서 $\overline{PQ}$가 원 C의 지름이므로 $\angle PAQ=90°$이다.



삼수선의 정리에 의하여

$\overline{RA}\perp\overline{QA}$

따라서 삼각형 ARQ는 직각삼각형이다.

한편 두 점 Q, R는 구 S 위의 점이고,

$\angle QPR=90°$이므로 $\overline{QR}$는 구의 지름이다.

구 S의 중심을 O라고 하면

$\overline{OQ}=\overline{OP}=2$

또 원 C의 중심을 O′이라 하고 점 O와 평면 α 사이의 거리를 d라고 하면 구 S의 중심 O와 원 C의 중심 O′은 일직선 상에 있으므로

$\overline{OO'}=d$

$\overline{OO'}=\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=1$

직각삼각형 OO′Q에서 $\overline{QO'}=\sqrt{3}$

직각삼각형 PAQ에서 $\overline{QA}=\sqrt{6}$

직각삼각형 QAR에서 $\overline{AR}=\sqrt{10}$

삼각형 ARQ의 넓이 s는

$s=\frac{1}{2}\times\overline{QA}\times\overline{AR}=\sqrt{15}$

따라서 $s^2=15$

27.

$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OM}$이므로

$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}-t\overrightarrow{OM}=t(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM})+\overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}=t(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}),\ \overrightarrow{MP}=t\overrightarrow{MA}$ (단, $0\le t\le 1$)

따라서 점 P가 그리는 도형은 선분 AM이므로

$\overline{AM}=\sqrt{3}$

28.

점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라고 하자.

$\vec{p}-\vec{a}=(x+1,\ y-2,\ z-4)$,

$\vec{p}-\vec{b}=(x-2,\ y-1,\ z-3)$

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$에서

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{11}{4}$

따라서 점 P가 그리는 도형의 겉넓이는

$4\times\pi\times\frac{11}{4}=11\pi$