07 공간좌표

기하와 벡터 교과서 Review

문제 1

좌표공간의 세 점 A$(4, 4, 3)$, B$(2, 1, 3)$, C$(3, 1, 5)$와 xy평면 위의 임의의 점 P, zx 평면 위의 임의의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{BQ}}+\overline{\mathrm{QC}}$ 의 최솟값을 구하여라.

문제 2

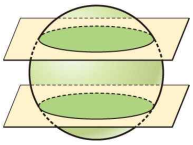
구 $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ 위를 움직이는 점 P와 원점 O 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

문제 3

거리가 1이고 xy평면에 평행한 두 평면으로 구

$$x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$$

을 잘라서 얻어진 두 단면의 넓이의 합의 최댓값을 구하여라.



문제 4

점 A$(2,\ 1,\ 1)$을 지나고 xy평면, yz평면, zx평면에 동시에 접하는 구의 방정식을 모두 구하여라.

07 공간좌표

기하와 벡터 교과서 Review

문제 5

두 점 $\mathrm{A}(3,\ -1,\ 2)$, $\mathrm{B}(0,\ 2,\ -1)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=1:2$인 점 P가 그리는 도형의 방정식을 구하여라.

문제 6

좌표공간에 반구

$$(x-4)^2+(y-5)^2+z^2=9,\ z\geq 0$$

이 있다. x축을 포함하는 평면 α가 반구와 접할 때, 평면 α와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라고 하자. 이때 $20\cos\theta$의 값을 구하여라. (단, $0^\circ<\theta<90^\circ$)

문제 7

두 점 $\mathrm{A}(-3,\ -3,\ -3)$, $\mathrm{B}(2,\ 4,\ 6)$을 잇는 선분 AB가 xy평면과 점 P에서 만날 때, $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}$를 구하는 풀이 과정과 답을 써라.

문제 8

점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 구가 두 개의 구

$$\mathrm{O}:\ x^2+y^2+z^2=1,$$
$$\mathrm{O}':\ (x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$$

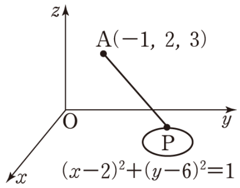
에 동시에 외접한다. 이때 점 P가 나타내는 도형의 길이를 구하는 풀이 과정과 답을 써라.

07 공간좌표

기하와 벡터 교과서 Review

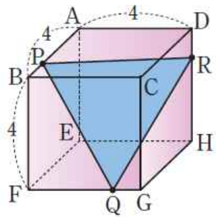
문제 9

좌표공간에서 xy평면 위의 원 $(x-2)^2+(y-6)^2=1$에 대하여 점 A$(-1,\ 2,\ 3)$과 원 위를 움직이는 점 P 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.



문제 10

다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정육면체에서 모서리 AB, FG, HD를 3 : 1로 내분하는 점을 각각 P, Q, R라고 할 때, 삼각형 PQR의 무게중심 I와 점 E 사이의 거리를 구하여라.



문제 11

구 $(x-2)^2+(y-4)^2+z^2=4$가 xy평면과 만나서 생기는 원을 C라고 하자. 이때 점 P$(-2,1,3)$에서 원 C에 이르는 최단 거리를 구하여라.

문제 12

좌표공간의 두 점 A, B를 이은 선분 AB의 xy평면, yz평면 위로의 정사영의 길이가 각각 3, 4일 때, 선분 AB의 길이의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

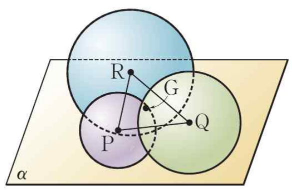
07 공간좌표

기하와 벡터 교과서 Review

문제 13 두 점 $\mathrm{A}(a, b, 5)$, $\mathrm{B}(0, 0, 4)$를 지나는 직선 l의 xy평면 위로의 정사영과 구 $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$의 xy평면 위로의 정사영이 서로 접할 때, $\frac{b}{a}$의 값을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

문제 14 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 5,\ -4)$, $\mathrm{B}(a,\ b,\ c)$에 대하여 선분 AB가 xy평면에 의하여 $1:2$로 내분되고, z축에 의하여 $3:2$로 외분된다고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

문제 15 반지름의 길이가 각각 6, 8, 10이고 서로 외접하는 세 구가 평면 α 위에 놓여 있다. 세 구의 중심을 각각 P, Q, R라고 할 때, 삼각형 PQR의 무게중심 G와 평면 α 사이의 거리를 구하여라.



07 공간좌표

기하와 벡터 교과서 Review

〈정답 및 해설〉 기하와 벡터 – 7단원. 공간좌표

1.

점 A를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 고 하면 $A'(4,\ 4,\ -3)$

$$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}\ge\overline{A'B}$$

점 C를 zx평면에 대하여 대칭이동한 점을 C′이라 고 하면 $C'(3,\ -1,\ 5)$

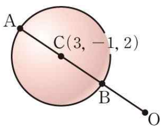
$$\overline{BQ}+\overline{QC}=\overline{BQ}+\overline{QC'}\ge\overline{BC'}$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{BQ}+\overline{QC}$

$$\ge\overline{A'B}+\overline{BC'}$$
$$=\sqrt{4+9+36}+\sqrt{1+4+4}$$
$$=10$$

2.

구 위의 임의의 점 P에 대하여 $\overline{OP}$의 길이가 최대가 되는 경우는 오른쪽 그림과 같이 점 O와 구의 중심 C를 지나는 선분의 연장선이 다시 구와 만나는 경우이다. 즉, 점 P가 점 A의 위치에 있을 때, $\overline{OP}$의 길이는 최대가 된다. ...... ㉮



따라서 $\overline{OP}$의 최댓값은

$$\overline{OA}=\overline{OC}+3=\sqrt{14}+3 \quad \cdots\cdots ㉯$$

또, $\overline{OP}$의 길이가 최소가 되는 경우는 $\overline{OC}$와 구가 만나는 경우이다. 즉, 점 P가 점 B의 위치에 있을 때, $\overline{OP}$의 길이는 최소가 된다. ...... ㉰

따라서 $\overline{OP}$의 최솟값은

$$\overline{OB}=\overline{OC}-3=\sqrt{14}-3 \quad \cdots\cdots ㉱$$

3.

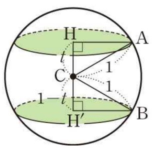
$x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$을 변형하면

$$(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=1$$

이므로 주어진 구의 반지름의 길이는 1이다.

구의 중심을 C라 하고, 점 C에서 두 평면에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라고 하자.

이때 두 평면 사이의 거리가 1이므로 $\overline{CH}=t$라고 하면



$$\overline{CH'}=1-t$$
$$\overline{AH}=\sqrt{1-t^2}$$
$$\overline{BH'}=\sqrt{1-(1-t)^2}$$

이므로 두 단면의 넓이의 합은

$$\pi(1-t^2)+\pi\{1-(1-t)^2\}$$
$$=\pi(1+2t-2t^2)=\pi\left\{-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\right\}$$

따라서 $t=\frac{1}{2}$일 때 두 단면의 넓이의 합의 최댓값은 $\frac{3}{2}\pi$이다.

4.

xy평면, yz평면, zx평면에 동시에 접하고, 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$(x-r)^2+(y-r)^2+(z-r)^2=r^2$$

으로 놓을 수 있다. 이 구가 점 $A(2,\ 1,\ 1)$을 지나므로

$$(2-r)^2+(1-r)^2+(1-r)^2=r^2$$
$$r^2-4r+3=0,\ (r-1)(r-3)=0$$
$$r=1 \text{ 또는 } r=3$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$$
$$\text{또는 } (x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9$$

5.

점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라고 하면

$\overline{PA}:\overline{PB}=1:2$에서 $\overline{PB}=2\overline{PA}$, $\overline{PB}^2=4\overline{PA}^2$

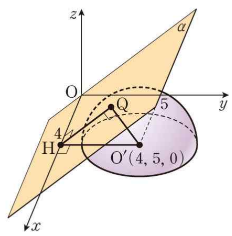
이므로

$$x^2+(y-2)^2+(z+1)^2$$
$$=4\{(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2\}$$

따라서 $x^2+y^2+z^2-8x+4y-6z+17=0$

6.

반구의 중심을 O′이라 하고, O′에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $H(4,\ 0,\ 0)$이므로



$$\overline{O'H}=5$$

x축을 포함하는 평면 α와 반구의 접점을 Q라고 하면 $\overline{O'Q}=3$

이때 $\overline{O'Q}\perp\alpha$, $\overline{O'H}\perp\overline{OH}$이므로 삼수선의 정리 ❷에 의하여 $\overline{OH}\perp\overline{QH}$

$\triangle O'QH$에서 $\overline{QH}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

평면 α와 xy평면이 이루는 각이 $\theta=\angle QHO'$이므로

$$\cos\theta=\frac{\overline{QH}}{\overline{Q'H}}=\frac{4}{5}$$

따라서 $20\cos\theta=16$

7.

$\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$이라고 하면 점 P는 $\overline{AB}$를 $m:n$으로 내분하는 점이다.

이때 점 P가 xy평면 위에 있으므로

$$\frac{6m-3n}{m+n}=0$$
$$n=2m$$
$$\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$$

8.

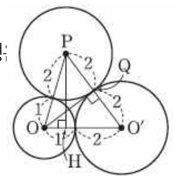
O$(0,\ 0,\ 0)$, O$'(2,\ -1,\ 2)$이므로

$\overline{OO'}=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3$

두 구 O, O$'$의 반지름의 길이의 합은

$1+2=3$

따라서 $\overline{OO'}$의 길이가 두 구 O, O$'$의 반지름의 길이의 합과 같으므로 두 구 O, O$'$은 외접한다.



오른쪽 그림과 같이 두 구 P, O$'$의 접점을 Q라 하고 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 P가 나타내는 도형로 하고 반지름의 길이가 $\overline{PH}$인 원이다.

직각삼각형 OO$'$Q에서

$\overline{OQ}=\sqrt{3^2-2^2}$

$=\sqrt{5}$

이므로 삼각형 OO$'$P에서

$\frac{1}{2}\overline{OO'}\cdot\overline{PH}=\frac{1}{2}\overline{PO'}\cdot\overline{OQ}$

$\frac{3}{2}\overline{PH}=2\sqrt{5}$

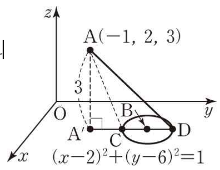
$\overline{PH}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$

따라서 구하는 점 P가 나타내는 도형의 길이는

$2\pi\cdot\frac{4\sqrt{5}}{3}=\frac{8\sqrt{5}}{3}\pi$

9.

다음 그림과 같이 점 A에서 xy평면에 내린 수선의 발을 A$'$이라고 하면 점 A$'$의 좌표는A$'(-1,\ 2,\ 0)$이다.



이때, 원의 반지름의 길이는 1이고 원의 중심 B의 좌표는 B$(2,\ 6,\ 0)$이므로

$\overline{A'B}=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(6-2)^2}$

$=\sqrt{9+16}$

$=\sqrt{25}$

$=5$

즉, $\overline{A'C}=5-1=4$, $\overline{A'D}=5+1=6$

따라서 점 A와 점 P 사이의 거리의 최댓값과 최솟값은 각각 다음과 같다.

(최댓값)$=\overline{AD}=\sqrt{\overline{AA'}^2+\overline{A'D}^2}$

$=\sqrt{3^2+6^2}$

$=\sqrt{9+36}$

$=\sqrt{45}$

$=3\sqrt{5}$

(최솟값)$=\overline{AC}=\sqrt{\overline{AA'}^2+\overline{A'C}^2}$

$=\sqrt{3^2+4^2}$

$=\sqrt{9+16}$

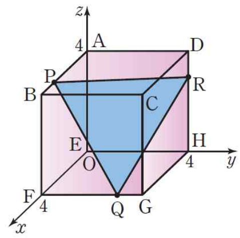
$=\sqrt{25}$

$=5$

답 최댓값: $3\sqrt{5}$, 최솟값: 5

10.

점 E를 원점이라 하고 세 모서리 EF, EH, EA를 각각 x축, y축, z축으로 놓으면



$\overline{AP}=4\times\frac{3}{4}=3$이므로 P$(3,\ 0,\ 4)$

$\overline{FQ}=4\times\frac{3}{4}=3$이므로 Q$(4,\ 3,\ 0)$

$\overline{HR}=4\times\frac{3}{4}=3$이므로 R$(0,\ 4,\ 3)$

삼각형 PQR의 무게중심 I의 좌표는

I$\left(\frac{7}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{7}{3}\right)$

따라서 $\overline{EI}=\sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2+\left(\frac{7}{3}\right)^2+\left(\frac{7}{3}\right)^2}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

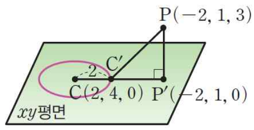
11.

구가 xy평면과 만나서 생기는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-4)^2=4$

이 원의 중심은 C$(2,\ 4,\ 0)$이고, 반지름의 길이는 2이다.

점 P의 xy평면 위로의 정사영을 P$'$, $\overline{P'C}$가 원과 만나는 점을 C$'$이라고 하면



P$'(-2,\ 1,\ 0)$

$\overline{P'C}=\sqrt{4^2+3^2+0^2}=5$

$\overline{P'C'}=5-2=3$

$\overline{P'C'}$은 점 P$'$에서 원 C에 이르는 최단 거리이므로 점 P에서 원 C에 이르는 최단 거리는 $\overline{PC'}$이다.

따라서 $\overline{PC'}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

12.

두 점 A, B의 좌표를 각각

$A(0,\ 0,\ 0),\ B(a,\ b,\ c)$

라고 하자. 점 B의 xy평면 위로의 정사영을 B'이라고 하면

$B'(a,\ b,\ 0)$

점 $B(a,\ b,\ c)$의 yz평면 위로의 정사영을 B''이라고 하면

$B''(0,\ b,\ c)$

$\overline{AB'}=3,\ \overline{AB''}=4$이므로

$a^2+b^2=9,\ b^2+c^2=16$

$\overline{AB}^2=a^2+b^2+c^2$

$=9+16-b^2$

$=25-b^2\ (0\le b^2\le 9)$

$4\le\overline{AB}\le 5$

따라서 선분 AB의 길이의 최댓값과 최솟값의 합은 9이다.

13.

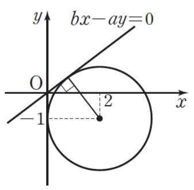
직선 l의 xy평면 위로의 정사영은 xy평면에서 $(a,\ b),\ (0,\ 0)$을 지나는 직선과 같으므로

$y=\dfrac{b}{a}x,\ bx-ay=0$

구 $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$의 xy평면 위로의 정사영은 xy평면에서 중심이 $(2,\ -1)$, 반지름의 길이가 2인 원과 같으므로

$(x-2)^2+(y+1)^2=4$

점 $(2,\ -1)$에서 직선 $bx-ay=0$에 이르는 거리는 2이므로



$\dfrac{|2b+a|}{\sqrt{b^2+a^2}}=2$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2+4ab+4b^2=4a^2+4b^2$

$3a^2-4ab=0,\ a(3a-4b)=0$

이때 $a\ne 0$이므로 $3a-4b=0$

따라서 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{4}$

14.

선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{a-4}{3},\ \dfrac{b+10}{3},\ \dfrac{c-8}{3}\right)$

이 점은 xy평면 위의 점이므로 $\dfrac{c-8}{3}=0,\ c=8$

선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점의 좌표는

$(3a+4,\ 3b-10,\ 3x+8)$

이 점은 z축 위의 점이므로 $3a+4=0$에서 $a=-\dfrac{4}{3}$

$3b-10=0$에서 $b=\dfrac{10}{3}$

따라서 $a+b+c=-\dfrac{4}{3}+\dfrac{10}{3}+8=10$

15.

평면 α를 xy평면으로 놓고 생각하면 주어진 세 구는 xy평면 위에 있으므로 세 구는 모두 xy평면에 접한다.

따라서 세 구의 중심은 각각 $P(a_1,\ b_1,\ 6)$, $Q(a_2,\ b_2,\ 8)$, $R(a_3,\ b_3,\ 10)$으로 놓을 수 있다.

세 구가 서로 외접하고 모두 xy평면에 접하므로 $\triangle PQR$의 무게중심에서 xy평면까지의 거리는 $\triangle PQR$의 무게중심의 z좌표와 같다.

따라서 삼각형 PQR의 무게중심 G와 평면 α 사이의 거리는

$\dfrac{6+8+10}{3}=8$