점화식 ($a_{n+1} = 2a_n + b$ 수열)

recurrence relation)

비번면 결론 & 예제만 읽으세용

$A \rightarrow bB$ 일 때,

$\frac{P_B}{P_A}$ 는 원래 $b\times(2^n-1)$ 수열.

$\frac{P_B}{P_A} \rightarrow \frac{16a_0}{16} \quad \frac{8a_1}{8} \quad \frac{4a_2}{4} \quad \cdots$

$-8 \qquad -4$

초기 $\qquad \Delta n$

$8a_1 = 16a_0 + 8b \rightarrow a_1 = 2a_0 + b$

이전 $\qquad \Delta n$

$4a_2 = 8a_1 + 4b \rightarrow a_2 = 2a_1 + b$

∴ $\left\{\frac{P_B}{P_A}\right\} = \{a_n\}$ 일 때, $a_{n+1} = 2a_n + b$

(b는 반응 계수).

→ 초기에 생성물을 첨가했을 때는 $a_0 =$ 반응물 첨가량)

(생성물 두개일때도 $P_B + P_C$를 볼 땐 결론적으로 같음.)

→ 중간에 생성물을 첨가했을 때는 새로운 초항을 설정.

B를 C을 첨가

$\frac{4a_2}{4} \qquad \frac{2a_3}{2}$

-2

$2a_3 = 4a_2 + 2b + C$

$a_3 = 2a_2 + b + \frac{1}{2}C$

첨가 시엔 $\frac{\text{첨가량}}{2}$ 을 추가로 더해준다.

로 든걸 일반화 시켜보자.

	A	bB	
$t=0$	$k\times2^{-0}$	p	(일반적으로 $p=0$)
$t=1$	$k\times2^{-1}$	$p + b\times k\times2^{-1}$	
$t=2$	$k\times2^{-2}$	$p + bk\times(2^{-1}+2^{-2})$	
⋮			
$t=n$	$k\times2^{-n}$	$bk\times(2^{-1}+\cdots+2^{-n})$	

$= bk \times \frac{2^{-1}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\frac{1}{2}}$

$n_A = k\times\frac{1}{2^n} \qquad n_B = b\times k\times\frac{2^n-1}{2^n} + p$

$= \frac{k}{2^n}\left(b(2^n-1) + \frac{2^n p}{k}\right)$

고로 $\frac{n_B}{n_A} = b\times(2^n-1) + \frac{2^n p}{k}$

$a_n = 2^n\times\left(b+\frac{p}{k}\right) - b$ (n은 반감기 횟수)

$a_{n+1} = 2^{n+1}\times\left(b+\frac{p}{k}\right) - b$

$a_{n+1} = 2a_n + b$.

전체 몰수는 $\frac{k}{2^n}\left(2^n\times\left(b+\frac{p}{k}\right) - b + 1\right)$

$= k\left(b+\frac{p}{k} + \frac{1-b}{2^n}\right)$

$p=0$일때 $k\left(b+\frac{1-b}{2^n}\right)$

$k\left(b\left(\frac{2^n-1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n}\right)$

i) $p=0$ 일 때,

$\frac{n_B}{n_A} = a_n$, $\quad \frac{n_{전체}}{n_A} = \frac{n_B+n_A}{n_A} = b_n = a_n+1$

$a_n = b_n - 1$

$a_n = b(2^n-1)$ (1, 3, 7… 수열)

$a_{n+1} = b(2^{n+1}-1) = 2a_n+b$

$b_n - 1 = b(2^n-1)$, $\quad b_{n+1}-1 = 2(b_n-1)+b$,

$b_{n+1} = 2b_n + (b-1)$

∴ $a_n = b(2^n-1)$, $\quad a_{n+1} = 2a_n+b$

∴ $b_n = b(2^n-1)+1$, $\quad b_{n+1} = 2b_n+(b-1)$

n_A는 $\frac{k}{2^n}$ 이므로, 몰수를 직접 구하려면 이를 곱해주면 됨.

ii) $p\neq 0$ 일 때,

$$a_n = 2^n \times \left(b+\frac{p}{k}\right) - b = b(2^n-1) + \underbrace{\frac{p}{k}}_{=a_0}\times 2^n$$

$$a_{n+1} = 2a_n+b$$

고로 원래 알던 수열에 $a_0\times 2^n$을 더하면 된다.

그치만 일반항보다 점화식이 빠르다.

$$b_n = b(2^n-1) + a_0\times 2^n + 1$$

$$b_{n+1} = 2b_{n+1} + (b-1)$$

이것도 역시 점화식이 빠르다.

〈오늘의 결론〉

- 반응속도에서 낯선 지표는 웬만해서 $2a+b$로 풀린다.
- 특수 case는 일반항을 외워두고, 나머지는 점화식 쓴다.

i) 초기에 A만 존재 ($p=0$) $(A \rightarrow bB)$

$\frac{n_B}{n_A} = a_n = b(2^n-1)$

$\frac{n_{전체}}{n_A} = \frac{1}{x_A} = b_n = b(2^n-1)+1$

($b_n = a_n+1$ 을 활용.)

$a_{n+1} = 2a_n+b$

$b_{n+1} = 2b_{n+1} + (b-1)$

ii) 초기에 A, B 존재 ($p\neq 0$) (p는 B 초기 몰수)

$\frac{n_B}{n_A} = a_n = b(2^n-1) + a_0\times 2^n$

(점화식은 i)과 같으므로 웬만하면 점화식부터 쓴다)

- 점화식에서 더해지는 상수는 a_n, b_n에서 각각 b, $(b-1)$ 이다. (단, b는 생성물의 계수)
- 정 일반항을 쓰고싶다면?

$\{a_n+b\}$는 $r=2$인 등비수열

$\{b_n+(b-1)\}$은 $r=2$인 등비수열 임을 활용.

(p와 상관없이 항상 성립)

23.09.19 (P≠0, a_n 활용)

19. 다음은 A(g)로부터 B(g)와 C(g)가 생성되는 반응의 화학 반응식과 반응 속도식이다. k는 반응 속도 상수이다.

$$\mathrm{A}(g) \rightarrow \mathrm{B}(g) + \mathrm{C}(g) \qquad v = k[\mathrm{A}]$$

그림은 강철 용기 (가)와 (나)에 A(g)~C(g)를 넣은 초기 상태를, 표는 온도 T_1과 T_2에서 이 반응이 진행될 때 $\frac{P_A}{P_B+P_C}$를 반응 시간에 따라 나타낸 것이다. P_A~P_C는 각각 A(g)~C(g)의 부분 압력이고, $\frac{\text{(나)에서 } 4t\text{일 때 C}(g)\text{의 양(mol)}}{\text{(가)에서 } 2t\text{일 때 B}(g)\text{의 양(mol)}} = 1$이다.

2.5

$1+1+\frac{1}{2}$

(가)	(나)
A(g) 2 mol B(g) b mol T_1 V L	A(g) 1 mol C(g) c mol T_2 V L

반응 시간 $\frac{1}{a_n}$		t	$2t$	$3t$	$4t$
$\frac{P_A}{P_B+P_C}$ ‖ (반응물 계수)=2	~~(가)~~ 0 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$ 1+2	$\frac{1}{8}$ 6+2	$\frac{1}{18}$ 16+2	
	(나)		x $\frac{2}{11}$		$\frac{1}{13}$ 11+2

$\frac{c\times x}{b}$는? (단, (가)와 (나)의 온도는 각각 T_1과 T_2로 일정하고, 역반응은 일어나지 않는다.) (가) $a_0 = \frac{1}{2} \rightarrow b=1$

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{7}{18}$ ③ $\frac{7}{20}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{7}{22}$

13 < $2\times3+\frac{7}{4}\times4 \longrightarrow \frac{7}{4}+\frac{3}{4}$, C는 2.5몰이어야. ∴ $c=\frac{7}{4}$

$2\times1+\frac{11}{2}\times2 \longrightarrow \frac{11}{2}+\frac{1}{2}$, C는 6몰이어야,

22

반응물 계수 2이므로 $a_{n+1} = 2a_n + 2$ 여야,

$\frac{P_A}{P_B+P_C} = \frac{1}{a_n}$, (가) $a_n = 3, 8, 18 \cdots$ ∴ $\tau = t$

$a_0 = \frac{1}{2}$ 이므로 $b=1$. (가) $2t$에서 B $\frac{5}{2}$몰

(나)의 $4t$에서 $13 = 2\times(2^n-1) + a_0\times 2^n$ 꼴이어야.

$13 = 2\times3 + \frac{7}{4}\times4 \rightarrow$ $4t$에서 C $\frac{7}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{2}$몰 → 가능

$13 = 2\times1 + \frac{11}{2}\times2 \rightarrow$ $4t$에서 C $\frac{11}{2}+\frac{1}{2}=6$몰 → 불가능.
(이미 2.5 초과)

∴ $c = \frac{7}{4}$, $13 = 11+2$ 이므로 $x = \frac{2}{11}$

$\frac{c\times x}{b} = \frac{7}{4}\times\frac{2}{11} = \boxed{\frac{7}{22}}$

Sol(2) 무지성 보내다가 $a_0 < \frac{5}{2}$면 멈추기.

$13 \rightarrow \frac{11}{2} \rightarrow \frac{7}{4} \rightarrow \cancel{\frac{?}{8}}$

불가능 가능!

22.11.19 (P≠0, a_n 활용)

19. 다음은 A(g)로부터 B(g)가 생성되는 반응의 화학 반응식과 반응 속도식이다. k는 반응 속도 상수이다.

$$2\mathrm{A}(g) \rightarrow \mathrm{B}(g) \qquad v = k[\mathrm{A}]$$

표는 A(g)와 B(g)의 혼합 기체를 강철 용기 (가)와 (나)에 각각 넣은 후 반응이 진행될 때, $\frac{\text{B}(g)\text{의 양(mol)}}{\text{A}(g)\text{의 양(mol)}}$을 반응 시간에 따라 나타낸 것이다. (가)와 (나)에서 온도는 각각 T_1과 T_2로 일정하고, (나)에서 반응 전 A(g)의 몰 분율은 $\frac{2}{3}$이다. → $a_0 = \frac{1}{2}$

$a_{n+1} = 2a_n + \frac{1}{2}$

반응 시간		$2t$	$3t$
$a_n = \frac{\text{B}(g)\text{의 양(mol)}}{\text{A}(g)\text{의 양(mol)}}$	(가)	7	$\frac{29}{2}$ $=14+\frac{1}{2}$, ∴ $\tau = t$
	(나) $\frac{1}{2}$		$\frac{7}{2}$

$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2} \rightarrow \frac{7}{2}$, ∴ $\tau = \frac{3}{2}t$

이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

~~ㄱ~~. (가)에서 반응 전 A(g)의 몰 분율은 $\frac{1}{2}$이다. $\frac{29}{2} = \frac{7}{2} + \frac{11}{8}\times8$

ㄴ. T_2에서 이 반응의 반감기는 $\frac{3}{2}t$이다.

~~ㄷ~~. $T_2 > T_1$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

반응물 계수 $\frac{1}{2}$ 이므로 $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$ 이어야.

(가) $\frac{29}{2} = 14 + \frac{1}{2}$, ∴ $\tau = t$ (7의 2배 $+\frac{1}{2}$)

(나) 초기 $\chi_A = \frac{2}{3} \rightarrow a_0 = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2} \rightarrow \frac{7}{2}$, ∴ $\tau = \frac{3}{2}t$

~~ㄱ~~. $\frac{29}{2} = \frac{1}{2}\times(2^3-1) + \frac{11}{8}\times2^3$, $\chi_A = \frac{8}{19}$

ㄴ. $\tau = \frac{3}{2}t$

~~ㄷ~~. $T_2 < T_1$

(충격적으로 빠르게 풀림)

22.09.17 ($p=0$, b_n 활용)

17. 다음은 A(g)로부터 B(g)와 C(g)가 생성되는 반응의 화학 반응식과 반응 속도식이다.

$b_n = 2b_n + \left(\frac{3}{2}-1\right)$

$$2A(g) \xrightarrow{+1} 2B(g) + C(g) \qquad v = k[A] \ (k\text{는 반응 속도 상수})$$

$9d \quad 5d \quad 8d$

표는 부피가 같은 2개의 강철 용기에 같은 질량의 A(g)를 각각 넣은 후, 서로 다른 온도 T_1, T_2에서 반응시킨 실험 Ⅰ과 Ⅱ의 자료이다. 반응 시간(t)이 $t = 20$ min일 때 $\frac{\text{Ⅱ에서 B의 질량}}{\text{Ⅰ에서 C의 질량}} = \frac{5}{6}$이다. ($z$, $2z$)

$x_A = \frac{1}{b_n}$

실험	온도	$\frac{t = 40\text{ min일 때 A의 몰 분율}}{t = 20\text{ min일 때 A의 몰 분율}}$	$t = 30$ min일 때 A의 몰 분율
Ⅰ	T_1 ∨	$\frac{11}{47}$ ($\frac{11/2}{47/2}$) $z=10$	$\frac{2}{23}x$ $\quad \frac{1}{2} = 11+\frac{1}{2}$
Ⅱ	T_2	$\frac{5}{11}$ $\quad z=20$	

$x \times \frac{\text{A의 화학식량}}{\text{C의 화학식량}}$은?

	ⅡB	ⅠC
n	8	6
w	5	6
M	5	8

$\frac{2}{23} \times \frac{9}{8} = \frac{9}{92}$

① $\frac{9}{92}$ ② $\frac{5}{46}$ ③ $\frac{3}{23}$ ④ $\frac{7}{46}$ ⑤ $\frac{5}{23}$

$x_A = \frac{1}{b_n}$, $\quad b_{n+1} = 2b_n + \left(\frac{3}{2}-1\right)$,

$b_0 = 1$, $\quad \overset{b_0}{1} \rightarrow \overset{b_1}{\frac{5}{2}} \rightarrow \overset{b_2}{\frac{11}{2}} \rightarrow \overset{b_3}{\frac{23}{2}} \rightarrow \overset{b_4}{\frac{47}{2}}$ (외지성 나열)

∴ Ⅰ에서 $z=10$, Ⅱ에서 $z=20$, $x = \frac{2}{23}$

Ⅰ에서 $t=20$ 일때 $2z$, Ⅱ에서 $t=20$일때 z

n) Ⅱ의 B : Ⅰ의 C = $2\times2 : 1\times3 = 4:3$

	B	C
w	5	6
n	4	3
M	5	8

M A : B : C = 9 : 5 : 8

$x \times \frac{M_A}{M_C} = \frac{2}{23} \times \frac{9}{8} = \boxed{\frac{9}{92}}$

※ 얘는 자연수비로 $11 = 2\times5+1$ 이 나왔으므로 전체 식에 ½을 곱해 상수를 맞춰주어야 절대량이 나온다. b_n 끼리의 비율을 제시해서 절대량을 숨겼기 때문. 같은 세팅에 $p\neq0$ 일때로 연습해보는 것이 좋겠다.

21.11.19 ($p=0$, a_n 활용)

19. 다음은 A(g)로부터 B(g)와 C(g)가 생성되는 반응의 화학 반응식과 반응 속도식이다.

$$2A(g) \rightarrow 2B(g) + C(g) \qquad v = k[A] \ (k\text{는 반응 속도 상수})$$

표는 부피가 같은 2개의 강철 용기에 같은 질량의 A(g)를 각각 넣고 온도 T_1과 T_2에서 반응시킬 때, 반응 시간(t)에 따른 $\frac{P_B + P_C}{P_A}$를 나타낸 것이다. P_A ~ P_C는 각각 A ~ C의 부분 압력이다.

실험 Ⅰ에서 $t = 16$ min일 때, $\frac{\text{C의 질량}}{\text{B의 질량}} = \frac{4}{5}$이다.

실험	온도	$\frac{P_B+P_C}{P_A}$			
		$t=0$	$t=16$ min	$t=32$ min	$t=48$ min
Ⅰ	T_1	0	a		$7a$
Ⅱ	T_2	0	b	$5b$	

이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. Ⅰ에서 반감기는 8 min이다.

ㄴ. $\frac{b}{a} = 3$이다.

ㄷ. Ⅱ에서 $t = 16$ min일 때, $\frac{\text{C의 질량}}{\text{A의 질량}} = \frac{20}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

a_n의 시초문제. 화파가 얼마나 빨리 고이는지를 표시하기 위해 넣었다. 발전 양상을 보면 다음엔 $p\neq0$, b_n 차례일까?

<태3 정리>

i) a_n 활용, $p=0$

→ 일반항 추론 $(1, 3, 7 \cdots)$

ii) b_n 활용, $p=0$

→ $b_0=1$ 에서 무지성 나열

iii) a_n 활용 $p\neq0$

→ a_0 알때 무지성 나열

→ a_0 모를때 자료 기반 역추적

+ 안나올때 일반항 case 분류

iv) b_n 활용 $p\neq0$

→ b_0 알때 무지성 나열

→ b_0 모를때 자료 기반 역추적

+ 안나올때 일반항 case 분류.

사실 iii), iv) 는 거의 비슷한게, 상수가 b냐 (b-1)이냐는 차이고 풀이 방식은 거의 같다.

다만 a_n의 절대값을 알때는 무지성 나열로 좋지만 비율을 줬을 때는 상수를 맞춰줘야 한다.

일단 두 항을 나열해놓고 규칙을 찾은 뒤, 상수항을 맞춰주면 된다.

ex) $2A \rightarrow 2B + C$ $\quad v = k[A]$

몰분율의 비가 $\frac{12}{5}$, $\frac{13}{6}$ 인 경우가 있다고 해보자.

$\{a_n+b\}$는 등비수열 이므로 미지수 α를 더해서 숫자를 맞추면 $12+\alpha = 2(5+\alpha)$, $\therefore \alpha = 2$

이때 $b-1 = \frac{1}{2}$이므로, 4로 나눠서 맞춰주면

$\frac{1}{x_A} = \frac{5}{4}, 3, \frac{13}{2} \cdots$ 가 된다.

+ 몰수 끼리의 비는 네일드 수열에 $2^{칸수}$를 곱하기.

(계수 2) 2의 B : (계수 1) 32의 C $= \underset{계수}{2} \times \underset{칸}{2^2} \times 1 : 7 = 8 : 7$

찐찐막 정리

i) $p=0$ 일때 or 초항 아는 $p\neq0$ 일때

일반항 활용, 나열

ii) 초항 모르는 $p\neq0$ 일때

역추적, 일반항 기반 case 분류

iii) 항 끼리의 비율 제시했을 때 $(p\neq0)$

α 더해서 숫자 짜맞추기

iv) 중간에 뭔가를 첨가

처음 풀릴때 $\frac{(첨가량)}{2}$ 추가해주기.

끝!