

정리  $a_{n+1} = 2a_n + b$  수열

recurrence relation)

비례연  
결론 & 예제와 함께해용

$A \rightarrow bB$  일 때,

$\frac{P_B}{P_A}$  는 무언  $b \times (2^n - 1)$  이다.

$$\frac{P_B}{P_A} \rightarrow \frac{16a_0}{16} \xrightarrow{-8} \frac{8a_1}{8} \xrightarrow{-4} \frac{4a_2}{4} \dots$$

$$8a_1 = 16a_0 + 8b \rightarrow a_1 = 2a_0 + b$$

$$4a_2 = 8a_1 + 4b \rightarrow a_2 = 2a_1 + b$$

$\therefore \left\{ \frac{P_B}{P_A} \right\} = \{a_n\}$  일 때,  $a_{n+1} = 2a_n + b$   
( $b$ 는 반응계수).

→ 초기에 A<sub>0</sub>를 첨가핵을 띠는  $a_0 =$  반응을 첨가함)

(A<sub>0</sub>를 두개일 때  $P_B + P_C = 1$  를 봄 때 결론적으로 같음.)

→ 초기에 A<sub>0</sub>를 첨가핵을 띠는 M<sub>2</sub>를 첨가함을 확보.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{첨가}} \\ \frac{4a_2}{4} \xrightarrow{-2} \frac{2a_3}{2} \end{array}$$
$$2a_3 = 4a_2 + 2b + C$$
$$a_3 = 2a_2 + b + \left( \frac{1}{2}C \right),$$

첨가 시엔  $\frac{1}{2}C$  을 첨가로 더해준다.

B<sub>n</sub>을 일반화 시켜보자.

A      bB

$$t=0 \quad k \times 2^0 \quad p \quad (\text{일반화 } p=0)$$

$$t=1 \quad k \times 2^{-1} \quad p + b \times k \times 2^{-1}$$

$$t=2 \quad k \times 2^{-2} \quad p + b \times k \times (2^{-1} + 2^{-2})$$

⋮

$$t=n \quad k \times 2^{-n} \quad b \times k \times (2^{-1} + \dots + 2^{-n})$$

$$= b \times k \times \underbrace{2^{-n} \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right)}_{\frac{1}{k}}$$

$$\begin{aligned} n_A &= k \times \frac{1}{2^n} & n_B &= b \times k \times \frac{2^n - 1}{2^n} + p \\ &= \frac{k}{2^n} \left( b(2^n - 1) + \frac{2^n p}{k} \right) \end{aligned}$$

$$\text{그리 } \frac{n_B}{n_A} = b \times (2^n - 1) + \frac{2^n p}{k}$$

$$a_n = 2^n \times \left( b + \frac{p}{k} \right) - b$$

( $n$ 은 A<sub>n</sub>을 첨가할 때)

$$a_{n+1} = 2^{n+1} \times \left( b + \frac{p}{k} \right) - b$$

$$a_{n+1} = 2a_n + b.$$

$$\text{전체 흐름 } \frac{k}{2^n} \left( 2^n \times \left( b + \frac{p}{k} \right) - b + 1 \right)$$

$$= k \left( b + \frac{p}{k} + \frac{1-b}{2^n} \right)$$

$$\begin{aligned} p=0 \text{ 일 때 } & k \left( b + \frac{1-b}{2^n} \right) \\ & k \left( b \left( \frac{2^n - 1}{2^n} \right) + \frac{1}{2^n} \right) \end{aligned}$$

i)  $P=0$  일 때

$$\frac{n_B}{n_A} = a_n, \quad \frac{n_{\text{전체}}}{n_A} = \frac{n_B+n_A}{n_A} = b_n = a_n + 1$$

$$a_n = b_n - 1$$

$$a_n = b(2^n - 1) \quad (1, 3, 7, \dots \text{ 수열})$$

$$a_{n+1} = b(2^{n+1} - 1) = 2a_n + b$$

$$b_n - 1 = b(2^n - 1), \quad b_{n+1} - 1 = 2(b_n - 1) + b,$$

$$b_{n+1} = 2b_n + (b-1)$$

$$\therefore a_n = b(2^n - 1), \quad a_{n+1} = 2a_n + b$$

$$\therefore b_n = b(2^n - 1) + 1, \quad b_{n+1} = 2b_n + (b-1)$$

$n_A$ 는  $\frac{k}{2^n}$  일 때, 몫수를 직접 구하려면 이를 곱해주면 됨.

ii)  $P \neq 0$  일 때,

$$a_n = 2^n \times \left( b + \frac{P}{k} \right) - b = b(2^n - 1) + \underbrace{\left( \frac{P}{k} \times 2^n \right)}_{a_0}$$

$$a_{n+1} = 2a_n + b$$

23 원래 알던 수열에  $a_0 \times 2^n$ 을 더하면 된다.

그치마는 일반항보다 점화식이 바뀐다.

$$b_n = b(2^n - 1) + a_0 \times 2^n + 1$$

$$b_{n+1} = 2b_n + (b-1)$$

이것도 역시 점화식이 바뀐다.

## 〈오늘의 결론〉

- 반복속도에서 높은 지급는 원만해지  $2a+b \leq \frac{p}{2^n}$

- 특수 case는 일반항을写出하고, 나머지는 정회식 쓴다.

i) 초기에 A만 존재 ( $P=0$ )  $(A \rightarrow bB)$

$$\frac{n_B}{n_A} = a_n = b(2^n - 1)$$

$$\frac{n_{\text{전체}}}{n_A} = \frac{1}{x_A} = b_n = b(2^n - 1) + 1$$

(  $b_n = a_{n+1}$  을 활용.)

$$a_{n+1} = 2a_n + b$$

$$b_{n+1} = 2b_n + (b-1)$$

ii) 초기에 A, B 존재 ( $P \neq 0$ ) ( $P$ 는 B 초기 몫수)

$$\frac{n_B}{n_A} = a_n = b(2^n - 1) + a_0 \times 2^n$$

(정회식은 i) 과 같은으로 원만해지면 정회식부터 쓴다)

- 점화식에서 더해지는 상수는  $a_n, b_n$ 이 M 각각

$b, (b-1)$ 이다. (단, b는 생성물의 계수)

- 정 일반항을 쓰고 싶다면?

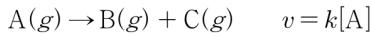
$\{a_n + b\}$ 는  $r=2$ 인 등비수열

$\{b_n + (b-1)\}$ 은  $r=2$ 인 등비수열 이다를 활용.

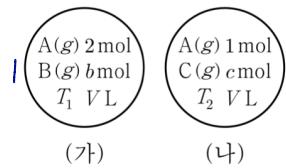
(P와 상관없이 항상 성립)

23. 09. 10 ( $\rho \neq 0$ ,  $a_n$  활용)

19. 다음은  $A(g)$ 로부터  $B(g)$ 와  $C(g)$ 가 생성되는 반응의 화학 반응식과 반응 속도식이다.  $k$ 는 반응 속도 상수이다.



그럼은 강철 용기 (가)와 (나)에  $A(g) \sim C(g)$ 를 넣은 초기 상태를, 표는 온도  $T_1$ 과  $T_2$ 에서 이 반응이 진행될 때  $\frac{P_A}{P_B + P_C}$ 를 반응 시간에 따라 나타낸 것이다.  $P_A \sim P_C$ 는 각각  $A(g) \sim C(g)$ 의 부분 압력이고, (나)에서 4t일 때  $C(g)$ 의 양(mol)  $\frac{25}{(가)에서 2t일 때 B(g)의 양(mol) 11+1} = 1$ 이다.



		반응 시간	t	2t	3t	4t
		$\frac{1}{a_n}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{18}$
$P_A$	(나)	$\frac{1}{2}$	$1+2$	$6+2$	$14+2$	
$P_B + P_C$	(나)	$\frac{1}{2}$		$x \frac{2}{11}$		$\frac{1}{13}$

$\boxed{11+2}$

$\frac{c \times x}{b}$  는? (단, (가)와 (나)의 온도는 각각  $T_1$ 과  $T_2$ 로 일정하고, 역반응은 일어나지 않는다.) (7)  $a_0 = \frac{1}{2} \rightarrow b = 1$

$$\begin{array}{l} ① \frac{2}{5} \quad ② \frac{7}{18} \quad ③ \frac{7}{20} \quad ④ \frac{1}{3} \quad ⑤ \frac{7}{22} \\ \text{B} \leftarrow \frac{2 \times 3 + \frac{1}{4} \times 4}{2 \times 1 + \frac{11}{2} \times 2} \rightarrow \frac{\frac{11}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{11}{2} + \frac{1}{2}}, C \text{는 } 6 \text{mol이어야.} \quad \boxed{22} \end{array}$$

반응을 계속 201으로  $a_{n+1} = 2a_n + 2$  이여야,

$$\frac{P_A}{P_B + P_C} = \frac{1}{a_n}, \quad (7) \quad a_n = 3, 8, 18, \dots \quad \therefore z = t$$

$a_0 = \frac{1}{2}$  이므로  $b = 1$ . (7) 2t에서 B  $\frac{5}{2}$  mol

(h)의 4t에 M  $|3 = 2 \times (2^n - 1) + a_0 \times 2^n \Rightarrow 0이어야.$

$$|3 = 2 \times 3 + \frac{1}{4} \times 4 \rightarrow 4t에 M C \frac{11}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{2} \text{mol} \rightarrow 가능$$

$$|3 = 2 \times 1 + \frac{11}{2} \times 2 \rightarrow 4t에 M C \frac{11}{2} + \frac{1}{2} = 6 \text{mol} \rightarrow 가능. \quad (\text{이미 } 25 \text{ 초과})$$

$$\therefore C = \frac{11}{4}, \quad |3 = 11+2 \text{ 이므로 } x = \frac{2}{11}$$

$$\frac{C \times x}{b} = \frac{11}{4} \times \frac{2}{11} = \boxed{\frac{11}{22}}$$

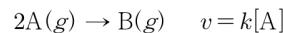
Sol(2) 무지성 보내다가  $a_0 < \frac{1}{2}$  면 멈추기.

$$|3 \rightarrow \frac{11}{2} \rightarrow \frac{11}{4} \rightarrow \cancel{\frac{11}{4}}$$

불가능      가능!

22. 11. 19 ( $\rho \neq 0$ ,  $a_n$  활용)

19. 다음은 A(g)로부터 B(g)가 생성되는 반응의 화학 반응식과 반응 속도식이다. k는 반응 속도 상수이다.



표는 A(g)와 B(g)의 혼합 기체를 강철 용기 (가)와 (나)에 각각 넣은 후 반응이 진행될 때,  $\frac{B(g)\text{의 양(mol)}}{A(g)\text{의 양(mol)}}$  을 반응 시간에 따라 나타낸 것이다. (가)와 (나)에서 온도는 각각  $T_1$ 과  $T_2$ 로 일정하고, (나)에서 반응 전 A(g)의 몰 분율은  $\frac{2}{3}$  이다.  $\rightarrow a_0 = \frac{1}{2}$

$$a_{n+1} = 2a_n + \frac{1}{2}$$

반응 시간			2t	3t
	(가)	(나)	7	$\frac{29}{2} = 14 + \frac{1}{2}, \therefore z = t$
$\frac{B(g)\text{의 양(mol)}}{A(g)\text{의 양(mol)}}$			$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$

$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2} \rightarrow \frac{11}{2}, \therefore z = \frac{11}{2}$

이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보기>

(X) (가)에서 반응 전 A(g)의 몰 분율은  $\frac{1}{2}$  이다.  $\frac{21}{2} = \frac{1}{2} + \frac{11}{8} \times 2$

(O) T<sub>2</sub>에서 이 반응의 반감기는  $\frac{3}{2} t^{\alpha}$  이다.

(X) T<sub>2</sub> > T<sub>1</sub> 이다.

① ✗      ② ✗      ③ ✗      ④ ✗, ✗      ⑤ ✗, ✗

반응을 계속  $\frac{1}{2}$  이므로  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$  이어야.

$$(7) \quad \frac{29}{2} = 14 + \frac{1}{2}, \quad \therefore z = t \quad (\text{7의 } 2^{11} + \frac{1}{2})$$

$$(h) \quad \text{초기 } X_A = \frac{2}{3} \rightarrow a_0 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2} \rightarrow \frac{11}{2}, \quad \therefore z = \frac{3}{2} t$$

$$(X) \quad \frac{21}{2} = \frac{1}{2} \times (2^3 - 1) + \frac{11}{8} \times 2^3, \quad X_A = \frac{8}{19}$$

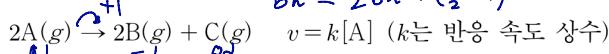
$$(L) \quad z = \frac{3}{2} t$$

$$(X) \quad T_2 < T_1$$

(증거적으로 빌려온 풀임)

22. 09. 17 ( $P=0$ ,  $b_n$  홀용)

17. 다음은 A(g)로부터 B(g)와 C(g)가 생성되는 반응의 화학 반응식과 반응 속도식이다.  $b_n = 2b_n + \left(\frac{3}{2} - 1\right)$



표는 부피가 같은 2개의 강철 용기에 같은 질량의 A(g)를 각각 넣은 후, 서로 다른 온도  $T_1$ ,  $T_2$ 에서 반응시킨 실험 I과 II의 자료

이다. 반응 시간( $t$ )이  $t = 20 \text{ min}$ 일 때  $\frac{\text{II에서 B의 질량}}{\text{I에서 C의 질량}} = \frac{5}{6}$ 이다.  $\chi_A = \frac{1}{b_n}$

실험	온도	$t = 40 \text{ min}$ 일 때 A의 몰 분율 $t = 20 \text{ min}$ 일 때 A의 몰 분율	$t = 30 \text{ min}$ 일 때 A의 몰 분율
I	$T_1$	$\frac{11}{47}$	$\frac{2}{23}x \quad \frac{1}{2} = \frac{11}{22}$
II	$T_2$	$\frac{5}{11}$	$\frac{2}{23}x = 20$

$$x \times \frac{A\text{의 화학식량}}{C\text{의 화학식량}} \text{은?} \quad \begin{array}{c} IB \\ h \ 8 \\ w \ 5 \\ M \ 5 \end{array} \quad \begin{array}{c} IC \\ 6 \\ 6 \\ 8 \end{array} \quad \frac{2}{23} \times \frac{9}{8} = \frac{9}{92}$$

$$\checkmark \frac{9}{92} \quad ② \frac{5}{46} \quad ③ \frac{3}{23} \quad ④ \frac{7}{46} \quad ⑤ \frac{5}{23}$$

$$\chi_A = \frac{1}{b_n}, \quad b_{n+1} = 2b_n + \left(\frac{3}{2} - 1\right),$$

$$b_0 = 1, \quad 1 \rightarrow \frac{b_1}{2} \rightarrow \frac{b_2}{2} \rightarrow \frac{b_3}{2} \rightarrow \frac{b_4}{2} \quad (\text{유지성})$$

$$\therefore \text{I에서 } z = 10, \text{ II에서 } z = 20, \quad x = \frac{2}{23}$$

I에서  $t=20$  일 때  $2z$ , II에서  $t=20$  일 때  $z$

w) II의 B : I의 C =  $2 \times 2 : 1 \times 3 = 4 : 3$

$$\begin{array}{c} B \ C \\ w \ 5 \ 6 \\ n \ 4 \ 3 \\ M \ 5 \ 8 \end{array} \quad \begin{array}{c} A \ B \ C \\ 9 : 5 : 8 \end{array}$$

$$\chi \times \frac{M_A}{M_C} = \frac{2}{23} \times \frac{9}{8} = \boxed{\frac{9}{92}}$$

\* 저는 자연수비를  $11 = 2 \times 5 + 1$ 으로 나누었으므로

전체 식에  $\frac{1}{2}$ 을 곱해 상수를 맞춰주어야 절대량이

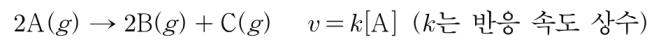
나온다.  $b_n$ 끼리의 비율을 제외해서 절대량을

놓겠기 때문. 같은 세팅에  $P \neq 0$  일 때도 연습

해보는 것도 좋겠지.

21. 11. 19 ( $P=0$ ,  $A_n$  홀용)

19. 다음은 A(g)로부터 B(g)와 C(g)가 생성되는 반응의 화학 반응식과 반응 속도식이다.



표는 부피가 같은 2개의 강철 용기에 같은 질량의 A(g)를 각각 넣고 온도  $T_1$ 과  $T_2$ 에서 반응시킬 때, 반응 시간( $t$ )에 따른

$\frac{P_B + P_C}{P_A}$ 를 나타낸 것이다.  $P_A \sim P_C$ 는 각각 A ~ C의 부분 압력이다.

실험 I에서  $t = 16 \text{ min}$ 일 때,  $\frac{C\text{의 질량}}{B\text{의 질량}} = \frac{4}{5}$ 이다.

실험	온도	$\frac{P_B + P_C}{P_A}$			
		$t = 0$	$t = 16 \text{ min}$	$t = 32 \text{ min}$	$t = 48 \text{ min}$
I	$T_1$	0	$a$		$7a$
II	$T_2$	0	$b$	$5b$	

이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보기>

ㄱ. I에서 반감기는 8 min이다.

ㄴ.  $\frac{b}{a} = 3$ 이다.

ㄷ. II에서  $t = 16 \text{ min}$ 일 때,  $\frac{C\text{의 질량}}{A\text{의 질량}} = \frac{20}{3}$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

$A_n$ 의 시초 문제. 회고전 열매를 빼는지 고이는지를

표시하기 위해 넣었다. 빼는지 가능성을 보면

다음엔  $P \neq 0$ ,  $b_n$ 은?

## <END 정리>

i)  $a_n = 0$ ,  $p=0$

→ 일반항  $\{a_n\} = \{1, 3, 5, \dots\}$

ii)  $b_n = 0$ ,  $p=0$

→  $b_0 = 1$  일 때 무지성 나열

iii)  $a_n = 0$ ,  $p \neq 0$

→  $a_0 = 0$  일 때 무지성 나열

→  $a_0 = 0$  일 때 자료 기반 역추적

+ 안내일 때 일반항 case 분류

iv)  $b_n = 0$ ,  $p \neq 0$

→  $b_0 = 0$  일 때 무지성 나열

→  $b_0 = 0$  일 때 자료 기반 역추적

+ 안내일 때 일반항 case 분류.

시사 i), ii), iii), iv) 는 거의 비슷한데, 상수가  $b_0$ 이

( $b_0 = 0$ )이거나  $\neq 0$ 이고 풀이 방식은 거의 같다.

다만  $a_n$ 의 절대값을 알파는 무지성 나열로 증명하는

비율을 찾을 때는 상수를 맞춰주어야 한다.

일단 두 항을 나열해놓고 규칙을 찾은 뒤,

상수항을 맞춰주면 된다.

ex)  $2A \rightarrow 2B + C \quad N = k[A]$

물분율의 비가  $\frac{12}{5}, \frac{13}{6}$ 인 경우가 있다고 해보자.

$\{a_n + b\}$ 는 등비수열 이므로 멱함수  $x$ 를 구해서

숫자를 맞춰면  $12+d = 2(5+d)$ ,  $\therefore d = 2$

이때  $b-1 = \frac{1}{2}$ 이므로, 4를 나누면서 맞춰주면

$$\frac{1}{x_A} = \frac{5}{4}, 3, \frac{13}{2}, \dots \text{ 가 된다.}$$

+ 물수 깊이의 비는 네임드 수열이  $2^{k+1}$ 을 곱하기.

$$\begin{array}{c} (\text{계수 } 2) \quad (\text{계수 } 1) \\ C \text{의 } B : 3C \text{의 } C = \frac{2 \times 2^2 \times 1}{\text{계수 } 3} ; 7 = 8! \end{array}$$

## 진짜 악 정리

i)  $p=0$  일 때 or 초항이든  $p \neq 0$  일 때

일반항  $\frac{1}{n}$ , 나열

ii) 초항  $\frac{1}{n}$ 은  $p \neq 0$  일 때

역추적, 일반항 기반 case 분류

iii) 항끼리의 비율 제시됐을 때 ( $p \neq 0$ )

$\alpha$  대해서 숫자 짜맞추기

iv) 중간에 뭉개를 찾거나

처음 둘 때  $\frac{(\text{첨기값})}{2}$  추가해주기.

끝!