2025학년도 피닉스 공통 모의고사

수학 영역 정답표

(홀수) 형

공통 과목					
문항번호	정답	배점	문항번호	정답	배점
1	④	2	12	④	4
2	①	2	13	③	4
3	②	3	14	①	4
4	⑤	3	15	⑤	4
5	④	3	16	24	3
6	③	3	17	32	3
7	③	3	18	363	3
8	④	3	19	432	3
9	⑤	4	20	17	4
10	③	4	21	770	4
11	②	4	22	353	4

1. 출제의도 : 지수 법칙을 활용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

$$\left(2^{\sqrt{3}} \times 4\right)^{(2+\sqrt{3})} \times 4^{-2\sqrt{3}} = 2^{(2+\sqrt{3}) \times (2+\sqrt{3})} \times 4^{-2\sqrt{3}} = 2^{(7+4\sqrt{3})} \times 4^{-2\sqrt{3}}$$
$$= 2^{(7+4\sqrt{3}-4\sqrt{3})} = 2^7 = 128$$

2. 출제의도 : 미분계수를 이용하여 양수 a의 값을 구할 수 있는가?

$f(x) = 3x^3 - 33x + 5$ 에서 $f'(x) = 9x^2 - 33$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) = 9a^2 - 33 = 3$$

따라서 $9a^2 = 36$ 이므로 양수 a의 값은 2

3. 출제의도 : 등비수열의 일반항을 구할 수 있는가?

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$a_n = ar^{n-1}$ (단, n은 자연수)

$a_1 + a_2 = a + ar$

$a_3 + a_4 = ar^2 + ar^3 = r^2(a + ar)$

$$\frac{a_3 + a_4}{a_1 + a_2} = \frac{r^2(a+ar)}{a+ar} = r^2 = 3$$

이므로 $a_5 = ar^4 = 9a = 3$, $a = \frac{1}{3}$

따라서 $a_1 = \frac{1}{3}$

4. 출제의도 : 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

$\lim_{x \to 0+} f(x) = 4$, $\lim_{x \to 1-} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 0+} f(x) + \lim_{x \to 1-} f(x) = 4 + 1 = 5$

5. 출제의도 : 거듭제곱근의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 n의 값을 구할 수 있는가?

$-n^2 + 7n + 8 = -(n+1)(n-8)$

이므로 $-n^2+7n+8$의 n제곱근 중에서 양수가 존재하기 위해서는
$-n^2+7n+8>0$이어야 한다.
$n^2-7n-8<0$
$(n+1)(n-8)<0$
$-1<n<8$
2이상의 자연수 n에 대하여
$2 \le n < 8$
따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은
$2+3+4+5+6+7=27$

6. 출제의도 : 함수가 연속일 조건을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$는 $x=0$에서만 불연속이므로
함수 $f(x)f(k)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 k의 값을 정한다.
함수 $f(x)f(k)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면
$f(k)=0$이어야 한다.
$f(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 -3, 2, 3이므로
k의 값은 -3, 2, 3이다.
따라서 조건을 만족시키는 모든 k의 값의 곱은 $(-3)\times 2\times 3=-18$

7. 출제의도 : 지수함수의 그래프와 직선의 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

직선 $y=kx$가 $(3,12)$를 지나므로
$k=4$
$y=kx$를 수직이등분하는 직선의 방정식이
$y=-\frac{1}{k}(x-3)+12=-\frac{1}{4}(x-3)+12$
이므로
점 C의 좌표는 $(51,0)$
원점을 O라 하면
$\overline{\mathrm{OC}}=51$이고
점 A, 점 B의 좌표가 각각 $(2,8)$, $(4,16)$이다.
따라서 삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times 51\times 16-\frac{1}{2}\times 51\times 8=204$

8. 출제의도 : 미분을 이용하여 함수의 그래프의 개형을 알 수 있는가?

$f(x) = ax^3 + (a-2)x^2 - 3x$ 에서

$f'(x) = 3ax^2 + 2(a-2)x - 3$

이때, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면

$f'(x) \le 0$

이때, 이차방정식 $f'(x) = 0$의 판별식을 D라 하면

$D/4 \le 0$이어야 하므로

$$\begin{aligned} D/4 &= (a-2)^2 + 9a \\ &= a^2 + 5a + 4 \\ &= (a+1)(a+4) \le 0 \end{aligned}$$

그러므로 $-4 \le a \le -1$, $1 \le a^2 \le 16$

따라서, a^2의 최댓값은 16이다.

9, 출제의도 : 수직선 위를 움직이는 점의 움직인 거리를 구할 수 있는가?

시각 $t=1$에서 $t=3$까지 두 점 P, Q의 운동 방향이 서로 반대가 되면

두 점 P, Q의 속도의 부호가 달라야 하므로 $v_2(2) = 0$이다.

즉, $b = -2a$

시각 $t=1$에서 $t=3$까지 두 점 P, Q의 움직인 거리가 서로 같아야 하므로

$$\int_1^3 |v_1(t)|\,dt = \int_1^3 |v_2(t)|\,dt$$

$$\begin{aligned} &\int_1^3 |4t-8|\,dt \\ &= \int_1^2 (-4t+8)\,dt + \int_2^3 (4t-8)\,dt \\ &= \left[-2t^2+8t\right]_1^2 + \left[2t^2-8t\right]_2^3 \\ &= 2+2 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^3 |at^2+bt|\,dt &= \int_1^3 |at^2-2at|\,dt \\ &= \int_1^2 (at^2-2at)\,dt + \int_2^3 (-at^2+2at)\,dt \\ &= \left[\frac{1}{3}at^3 - at^2\right]_1^2 + \left[-\frac{1}{3}at^3 + at^2\right]_2^3 \\ &= \left(-\frac{8}{3}a\right) - \left(-\frac{2}{3}a\right) = -2a \end{aligned}$$

이므로 $-2a = 4$

즉, $a = -2$, $b = 4$
$v_2(t) = -2t^2 + 4t$ 이다.
따라서 시각 $t = 4$ 에서 점 Q의 속도는
-16 이다.

10. 출제의도 : 등차수열의 뜻을 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

a_{m+2} , a_{m+4} , $\dfrac{31}{2}$, a_{5m} 은 순서대로
a_{m+2} , a_{m+4} , a_{m+6} , a_{m+8} 과 같다.
그러므로 $5m = m + 8$, $m = 2$
등차수열의 첫째항을 a , 공차를 $d(d > 0)$ 라 할 때,
$a_8 = a + 7d = \dfrac{31}{2}$, $a_7 = a + 6d = 14$ 이므로
$a = 5$, $d = \dfrac{3}{2}$
따라서, $m \times a_m = 2 \times a_2 = 2 \times \dfrac{13}{2} = 13$

11. 출제의도 : 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 에 대하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$f(x) = 3x^2 + ax + b$ (단, a , b 는 상수)
로 놓으면
$\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - 3x^2}{x+1} = 0$ 이므로
$a = 0$, 즉 방정식 $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt = 0$ 의 모든 실근의 합이 0 이다.
그러므로 방정식 $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt = 0$ 의 실근은 $-\dfrac{5}{2}$, 1 , $\dfrac{3}{2}$ 이다.
$$\int_1^x f(t)\,dt = \left(x + \frac{5}{2}\right)(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$
따라서 $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,dx = 105$

12. 출제의도 : 함수의 극한을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{ax^2+3x} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^2+3x}{f(x)}$ 이므로

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 $a(a>0)$인 이차함수이다.

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)f(x+1)}{x-1} = f(1) \times \lim_{x \to 1} \frac{f((x-1)+2)}{x-1}$$
$$= f(1) \times f'(2) = 3$$

$f(1)>0$이므로 $f'(2)>0$

함수 $f(x)$의 모든 항의 계수와 상수항이 정수이므로

모든 정수 α에 대하여 $f(\alpha)$와 $f'(\alpha)$의 값은 정수이다.

$f(x)=(x-2)(ax+b)$ (단, a, b는 상수)

로 놓으면 다음과 같다.

(i) $f(1)=1$, $f'(2)=3$일 때

$f(1)=-a-b=1$, $f'(2)=2a+b=3$

이므로 $a=4$, $b=-5$

$f(x)=(x-2)(4x-5)$

이므로 $f(7)=115$

(ii) $f(1)=3$, $f'(2)=1$일 때

$f(1)=-a-b=3$, $f'(2)=2a+b=1$

이므로 $a=4$, $b=-7$

$f(x)=(x-2)(4x-7)$

이므로 $f(7)=105$

(i), (ii)에 의하여 모든 $f(7)$의 값의 합은

$115+105=220$

13. 출제의도 : 도형의 성질과 코사인법칙을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

원 C_1과 원 C_2의 넓이의 비가 $1:9$이므로

원 C_2의 반지름이 $3\sqrt{2}$일 때

원 C_1의 반지름은 $\sqrt{2}$이다.

원 C_2의 중심을 O라 하면

삼각형 OAP에 대하여 피타고라스의 정리에 의해

$\overline{\mathrm{AP}}=4$, $\overline{\mathrm{AC}}=8$

삼각형 ABC가 이등변삼각형이므로

선분 AD가 삼각형 ABC와 삼각형 BDC를 수직이등분한다.

그러므로 선분 AD는 원 C_2의 지름이다.

$\angle \mathrm{ACD} = \angle \mathrm{ABD} = \dfrac{\pi}{2}$ 이므로

피타고라스의 정리에 의해

$\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{CD}} = 2\sqrt{2}$ 이고

점 O가 원 C_2의 중심이므로 원주각과 중심각과의 관계에 의해

$\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{BOD}$

이때, 두 삼각형 ABC, OBD가 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{OB}} : \overline{\mathrm{BD}}$

즉, $8 : \overline{\mathrm{BC}} = 3\sqrt{2} : 2\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{BC}} = \dfrac{16}{3}$

그러므로 코사인법칙에 의해

$$\begin{aligned}
\cos(\angle \mathrm{BAC}) &= \frac{8^2 + 8^2 - \left(\frac{16}{3}\right)^2}{2 \times 8 \times 8} \\
&= \frac{64 + 64 - \left(\frac{256}{9}\right)}{2 \times 8 \times 8} \\
&= \frac{128 - \left(\frac{256}{9}\right)}{128} \\
&= \frac{128 \times \left(1 - \frac{2}{9}\right)}{128} \\
&= \frac{7}{9}
\end{aligned}$$

$\cos(\angle \mathrm{BDC}) = -\cos(\angle \mathrm{BAC})$ 이므로

$\cos(\angle \mathrm{BAC}) - \cos(\angle \mathrm{BDC}) = 2\cos(\angle \mathrm{BAC})$

따라서 $\cos(\angle \mathrm{BAC}) - \cos(\angle \mathrm{BDC}) = \dfrac{14}{9}$

14. 출제의도 : 정적분의 성질을 이용하여 극점의 개수를 구할 수 있는가?

$x = a$, $x = b$ 에서만 불연속인 함수 $f(x)$의 도함수

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x + 1 & (x < a) \\ -(x-3)(x-6) & (a \le x < b) \\ (x-1)(x-6) & (x \ge b) \end{cases}$$

에 대하여

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면
도함수 $f'(x)$가 $x=\alpha$에서 좌우 극한의 부호가 달라야 한다.

(i) $a=1$일 때,

$x=a$, $x=b$에서만 불연속인 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 모든 실수 α의 개수가 3이 되도록 하는 순서쌍 (a,b)는 $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,6)$

(ii) $a=2$일 때,

$x=a$, $x=b$에서만 불연속인 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 모든 실수 α의 개수가 3이 되도록 하는 순서쌍 (a,b)는 $(2,3)$, $(2,6)$

(iii) $a=3$일 때,

$x=a$, $x=b$에서만 불연속인 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 모든 실수 α의 개수가 3이 되도록 하는 순서쌍 (a,b)는 $(3,4)$, $(3,5)$

(iv) $a=4$일 때,

$x=a$, $x=b$에서만 불연속인 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 모든 실수 α의 개수가 3이 되도록 하는 순서쌍 (a,b)는 $(4,5)$

(v) $a=5$일 때,

조건을 만족시키는 순서쌍이 존재하지 않는다.

(i) ~ (v)에 의하여 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a,b)의 개수는 8

15. 출제의도 : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 첫째항의 값을 구할 수 있는가?

11 이하의 자연수 n에 대하여
a_1을 k라 하면
$a_2=-k$, $a_3=k+1$이고,
$a_4=a_2+2$, $a_5=a_3+3$이므로
$a_4=2-k$, $a_5=k+4$

(i) $a_4a_5 \geq 0$일 때

(a) $a_9a_{10} \geq 0$일 때

$-4 \leq k \leq 2$이고,
$a_6=a_5+2\times a_4=(k+4)+2\times(2-k)=8-k$
이므로
$a_7=k+9$, $a_8=14-k$, $a_9=k+16$, $a_{10}=22-k$
$-16 \leq k \leq 22$이므로
$a_{11}=a_{10}+3\times a_9=(22-k)+3\times(k+16)=2k+70$
$a_{11}=74$이므로
$2k+70=74$, 즉 $k=2$

그러므로 $a_1 = 2$

(b) $a_9 a_{10} < 0$일 때

$-4 \le k \le 2$이고,

$a_6 = a_5 + 2 \times a_4 = (k+4) + 2 \times (2-k) = 8-k$

이므로

$a_7 = k+9$, $a_8 = 14-k$, $a_9 = k+16$, $a_{10} = 22-k$

$k < -16$ 또는 $k > 22$이므로

조건을 만족시키는 k의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a_4 a_5 < 0$일 때

(a) $a_9 a_{10} \ge 0$일 때

$k < -4$ 또는 $k > 2$이고,

$a_6 = a_4 + 4 = (2-k) + 4 = 6-k$

이므로

$a_7 = k+9$, $a_8 = 12-k$, $a_9 = k+16$, $a_{10} = 20-k$

$-16 \le k \le 20$이므로

$a_{11} = a_{10} + 3 \times a_9 = (20-k) + 3 \times (k+16) = 2k+68$

$a_{11} = 74$이므로

$2k+68 = 74$, 즉 $k = 3$

그러므로 $a_1 = 3$

(b) $a_9 a_{10} < 0$일 때

$k < -4$ 또는 $k > 2$이고,

$a_6 = a_4 + 4 = (2-k) + 4 = 6-k$

이므로

$a_7 = k+9$, $a_8 = 12-k$, $a_9 = k+16$, $a_{10} = 20-k$

$k < -16$ 또는 $k > 20$이므로

$a_{11} = a_9 + 9 = (k+16) + 9 = k+25$

$a_{11} = 74$이므로

$k+25 = 74$, 즉 $k = 49$

그러므로 $a_1 = 49$

(i), (ii)에 의하여 모든 a_1의 값의 합은

$2+3+49 = 54$

16. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 로그가 포함된 방정식의 해를 구할 수 있는가?

로그의 진수의 조건에 의하여

$x-1>0$ ⋯⋯ ㉠

$\log_{\sqrt{3}}(x-1)=\log_3(x-1)^2$ 이므로

$4^{\log_{\sqrt{3}}(x-1)}-16\leq 0$ 에서

$4^{\log_3(x-1)^2}\leq 16$

$\log_3(x-1)^2\leq 2$

$(x-1)^2\leq 9$

$x^2-2x-8\leq 0$

$(x-4)(x+2)\leq 0$

$-2\leq x\leq 4$

이때 ㉠에 의하여

$1<x\leq 4$

따라서 모든 정수 x의 값의 곱은

$2\times 3\times 4=24$

17. 출제의도 : 정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

$f'(x)=(x-1)(2x^2+5x-7)$ 에서

$f(3)-f(1)=\int_1^3 f'(x)\,dx$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_1^3 f'(x)\,dx &= \int_1^3 (x-1)(2x^2+5x-7)\,dx\\ &= \int_1^3 (2x^3+3x^2-12x+7)\,dx\\ &= \left[\frac{1}{2}x^4+x^3-6x^2+7x\right]_1^3\\ &= 32\end{aligned}$$

따라서 $f(3)-f(1)=32$

18. 출제의도 : 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

$$\sum_{k=1}^{15}(a_k-6)=\sum_{k=1}^{15}a_k-90$$

이고

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{13}(3k+a_k) &= 3\sum_{k=1}^{13}k+\sum_{k=1}^{13}a_k \\ &= 3\times\frac{13\times14}{2}+\sum_{k=1}^{13}a_k \\ &= 273+\sum_{k=1}^{13}a_k\end{aligned}$$

에서

$$\sum_{k=1}^{15}a_k-90=273+\sum_{k=1}^{13}a_k$$

$$\sum_{k=1}^{15}a_k-\sum_{k=1}^{13}a_k=363$$

따라서

$a_{14}+a_{15}=363$

19. 출제의도 : 근의 조건이 주어진 방정식에서 미분을 이용하여 자연수 k를 구할 수 있는가?

방정식

$2x^3-9x^2+30-k=0$ …… ㉠

에서

$f(x)=2x^3-9x^2+30$

라 하면 ㉠의 실근은 곡선 $y=f(x)$의 그래프와

직선 $y=k$가 만나는 점의 x좌표이다.

한편,

$$\begin{aligned}f'(x) &= 6x^2-18x \\ &= 6x(x-3)\end{aligned}$$

이므로

$f'(x)=0$

에서

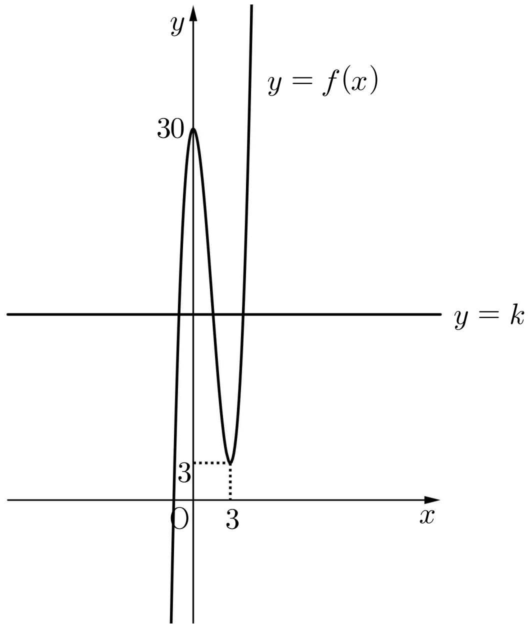
$x=0$ 또는 $x=3$

그러므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 삼차함수 $f(x)$는
$x=0$에서 극댓값 $f(0)=30$을 갖고,
$x=3$에서 극솟값 $f(3)=3$을 갖는다.



주어진 방정식의 실근은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 실근과 같으므로
주어진 방정식의 모든 실근의 곱이 음수가 될 조건은
위의 그래프에서
$k<30$, 즉 $3 \le k < 30$
이어야 한다.
따라서 구하는 모든 자연수 k의 값의 합은 432

20. 출제의도 : 로그의 성질 및 로그부등식을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 구할 수 있는가?

$\log_3 \sqrt{-n^2+14n+51}$에서
진수 조건에 의하여
$\sqrt{-n^2+14n+51} > 0$,
즉, $-n^2+14n+51>0$에서
$n^2-14n-51<0$
$(n+3)(n-17)<0$
$-3<n<17$
이때, n이 자연수이므로
$0<n<17$ …… ㉠

또, $\log_{\left(25-\frac{1}{2}kn\right)}9$에서

밑 조건에 의하여

$25-\dfrac{1}{2}kn>0$, $25-\dfrac{1}{2}kn\neq 1$

즉, $n<\dfrac{50}{k}$, $n\neq\dfrac{48}{k}$ …… ㉡

한편,

$\log_3\sqrt{-n^2+14n+51}\times\log_{\left(25-\frac{1}{2}kn\right)}9$

의 값이 양수이므로

$\log_3\sqrt{-n^2+14n+51}\times\log_{\left(25-\frac{1}{2}kn\right)}9>0$

에서

$$\log_9(-n^2+14n+51)\times\frac{1}{\log_9\left(25-\frac{1}{2}kn\right)}>0$$

$$\frac{\log_9(-n^2+14n+51)}{\log_9\left(25-\frac{1}{2}kn\right)}>0$$

이때, 밑 9가 1보다 크므로

$$\log_9(-n^2+14n+51)\times\log_9\left(25-\frac{1}{2}kn\right)>0$$

(i) $-n^2+14n+51>1$, $25-\dfrac{1}{2}kn>1$일 때

$7-3\sqrt{11}<n<7+3\sqrt{11}$, $n<\dfrac{48}{k}$

즉, 조건을 만족시키는 자연수 n의 범위가

$0<n<7+3\sqrt{11}$, $n<\dfrac{48}{k}$

즉, 조건을 만족시키는 자연수 n의 값이 5가 되기 위해서

$5<\dfrac{48}{k}\leq 6$를 만족시켜야 한다.

그러므로 조건을 만족시키는 자연수 k의 값은 8, 9이다.

(ii) $0<-n^2+14n+51<1$, $0<25-\dfrac{1}{2}kn<1$일 때

$-3<n<7-3\sqrt{11}$ 또는 $7+3\sqrt{11}<n<17$, $\dfrac{48}{k}<n<\dfrac{50}{k}$

즉, 조건을 만족시키는 자연수 n의 범위가

$7+3\sqrt{11}< n < 17$, $\dfrac{48}{k} < n < \dfrac{50}{k}$

그러므로 조건을 만족시키는 자연수 n의 값이 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 k의 값의 합은 17

21. 출제의도 : 함수의 그래프의 개형을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

부등식 $\dfrac{f(x)}{x-1} < \dfrac{g(x)}{x-1} < f'(x)$에서

$f(1)=0$, $g(1)=0$, $f'(1)=\dfrac{1}{2}$ 이므로

$\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1} < \lim_{x\to 1}\dfrac{g(x)}{x-1} < \lim_{x\to 1}f'(x)$

$g'(1)=\dfrac{1}{2}$, 즉 $g(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)$

함수 $f(x)-g(x)$를 $h(x)$라 하면

$x=1$에서 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$의 기울기가 같으므로

$x=1$에서 방정식 $h(x)=0$은 중근을 갖거나 삼중근을 갖는다.

(i) 방정식 $h(x)=0$이 $x=1$을 중근으로 갖는 경우

조건 (나)에서 $\int_{-3}^{k} g(x)\,dx > \int_{-3}^{k} f(x)\,dx$이므로

$\int_{-3}^{k}\{f(x)-g(x)\}\,dx = \int_{-3}^{k} h(x)\,dx < 0$

조건을 만족시키는 실수 k의 값의 범위가

$-3 < k < -1$이므로

$h(x)=f(x)-g(x)=(x-1)^2(x+1)(x+3)$

그러므로 $f(x)=(x-1)^2(x+1)(x+3)+\dfrac{1}{2}(x-1)$

(ii) 방정식 $h(x)=0$이 $x=1$을 삼중근으로 갖는 경우

조건 (나)에서 $\int_{-3}^{k} g(x)\,dx > \int_{-3}^{k} f(x)\,dx$이므로

$\int_{-3}^{k}\{f(x)-g(x)\}\,dx = \int_{-3}^{k} h(x)\,dx < 0$

조건을 만족시키는 실수 k의 값의 범위가

$-3 < k < -1$이므로

조건을 만족시키는 함수 $h(x)$는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=(x-1)^2(x+1)(x+3)+\frac{1}{2}(x-1)$

따라서 $f(5)$의 값은 770

22. 출제의도 : 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

a, b, c가 모두 자연수이고 $a>c$이므로

주기가 $\frac{2\pi}{|b\pi|}=\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$이고,

함수 $f(x)$의 최솟값은 음수이고 최댓값은 양수다.

$24=2^3\times 3$이고 $c\ge 1$, $a\ge 2$이므로

가능한 b의 값은 24의 양의 약수 중 24를 제외한 수이다.

b의 값에 따라 a와 c의 값을 결정해보면 다음과 같다.

(i) $b=1$일 때

가능한 순서쌍 (a,c)는 $(24,1)$, $(12,2)$, $(8,3)$, $(6,4)$이다.

함수 $f(x)$의 최솟값은 -1보다 작고, 주기는 2이므로

방정식 $f(x)+1=0$의 실근의 개수가 4이다.

방정식 $f(x)+1=0$의 실근을 a_1, a_2, a_3, a_4라 하면

$\frac{a_1+a_2}{2}=\frac{3}{2}$, $\frac{a_3+a_4}{2}=\frac{7}{2}$이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4=10$, 즉 $k=10$

가능한 순서쌍의 개수가 4이므로

구하는 모든 k의 값의 합은 40

(ii) $b=2$일 때

(a) 함수 $f(x)$의 최솟값이 -1일 때

가능한 순서쌍 (a,c)는 $(4,3)$이다.

함수 $f(x)$의 최솟값은 -1이고, 주기는 1이므로

방정식 $f(x)+1=0$의 실근의 개수가 4이다.

방정식 $f(x)+1=0$의 실근을 a_1, a_2, a_3, a_4라 하면

$a_1=\frac{3}{4}$, $a_2=\frac{7}{4}$, $a_3=\frac{11}{4}$, $a_4=\frac{15}{4}$이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4=9$, 즉 $k=9$

가능한 순서쌍의 개수가 1이므로

구하는 k의 값은 9

(b) 함수 $f(x)$의 최솟값이 -1이 아닐 때

가능한 순서쌍 (a,c)는 $(12,1)$, $(6,2)$이다.

함수 $f(x)$의 최솟값은 -1보다 작고, 주기는 1이므로

방정식 $f(x)+1=0$의 실근의 개수가 8이다.

방정식 $f(x)+1=0$의 실근을 a_1, a_2, $\cdots$, a_8라 하면

$\dfrac{a_1+a_2}{2}=\dfrac{3}{4}$, $\cdots$, $\dfrac{a_7+a_8}{2}=\dfrac{15}{4}$이므로

$a_1+a_2+\cdots+a_7+a_8=18$, 즉 $k=18$

가능한 순서쌍의 개수가 2이므로

구하는 모든 k의 값의 합은 36

(iii) $b=3$일 때

가능한 순서쌍 (a, c)는 $(8, 1)$, $(4, 2)$이다.

함수 $f(x)$의 최솟값은 -1보다 작고, 주기는 $\dfrac{2}{3}$이므로

방정식 $f(x)+1=0$의 실근의 개수가 12이다.

방정식 $f(x)+1=0$의 실근을 a_1, a_2, $\cdots$, a_{12}라 하면

$\dfrac{a_1+a_2}{2}=\dfrac{1}{2}$, $\cdots$, $\dfrac{a_{11}+a_{12}}{2}=\dfrac{23}{6}$이므로

$a_1+a_2+\cdots+a_{11}+a_{12}=26$, 즉 $k=26$

가능한 순서쌍의 개수가 2이므로

구하는 모든 k의 값의 합은 52

(iv) $b=4$일 때

(a) 함수 $f(x)$의 최솟값이 -1일 때

가능한 순서쌍 (a, c)는 $(3, 2)$이다.

함수 $f(x)$의 최솟값은 -1이고, 주기는 $\dfrac{1}{2}$이므로

방정식 $f(x)+1=0$의 실근의 개수가 8이다.

방정식 $f(x)+1=0$의 실근을 a_1, a_2, $\cdots$, a_8라 하면

$a_1=\dfrac{3}{8}$, $a_2=\dfrac{7}{8}$, $\cdots$, $a_8=\dfrac{31}{8}$이므로

$a_1+a_2+\cdots+a_7+a_8=17$, 즉 $k=17$

가능한 순서쌍의 개수가 1이므로

구하는 k의 값은 17

(b) 함수 $f(x)$의 최솟값이 -1이 아닐 때

가능한 순서쌍 (a, c)는 $(6, 1)$이다.

함수 $f(x)$의 최솟값은 -1보다 작고, 주기는 $\dfrac{1}{2}$이므로

방정식 $f(x)+1=0$의 실근의 개수가 16이다.

방정식 $f(x)+1=0$의 실근을 a_1, a_2, $\cdots$, a_{16}라 하면

$\dfrac{a_1+a_2}{2}=\dfrac{3}{8}$, $\cdots$, $\dfrac{a_{15}+a_{16}}{2}=\dfrac{31}{8}$ 이므로

$a_1+a_2+\cdots+a_{15}+a_{16}=34$, 즉 $k=34$

가능한 순서쌍의 개수가 1 이므로

구하는 k의 값은 34

(v) $b=6$일 때

가능한 순서쌍 (a,c)는 $(4,1)$이다.

함수 $f(x)$의 최솟값은 -1보다 작고, 주기는 $\dfrac{1}{3}$이므로

방정식 $f(x)+1=0$의 실근의 개수가 24이다.

방정식 $f(x)+1=0$의 실근을 a_1 , a_2 , $\cdots$, a_{24}라 하면

$\dfrac{a_1+a_2}{2}=\dfrac{1}{4}$, $\cdots$, $\dfrac{a_{23}+a_{24}}{2}=\dfrac{47}{12}$ 이므로

$a_1+a_2+\cdots+a_{23}+a_{24}=50$, 즉 $k=50$

가능한 순서쌍의 개수가 1 이므로

구하는 k의 값은 50

(vi) $b=8$일 때

가능한 순서쌍 (a,c)는 $(3,1)$이다.

함수 $f(x)$의 최솟값은 -1보다 작고, 주기는 $\dfrac{1}{4}$이므로

방정식 $f(x)+1=0$의 실근의 개수가 32이다.

방정식 $f(x)+1=0$의 실근을 a_1 , a_2 , $\cdots$, a_{32}라 하면

$\dfrac{a_1+a_2}{2}=\dfrac{3}{16}$, $\cdots$, $\dfrac{a_{31}+a_{32}}{2}=\dfrac{63}{16}$ 이므로

$a_1+a_2+\cdots+a_{31}+a_{32}=66$, 즉 $k=66$

가능한 순서쌍의 개수가 1 이므로

구하는 k의 값은 66

(vii) $b=12$일 때

가능한 순서쌍 (a,c)는 $(2,1)$이다.

함수 $f(x)$의 최솟값은 -1이고, 주기는 $\dfrac{1}{6}$이므로

방정식 $f(x)+1=0$의 실근의 개수가 24이다.

방정식 $f(x)+1=0$의 실근을 a_1 , a_2 , $\cdots$, a_{24}라 하면

$a_1=\dfrac{1}{8}$, $a_2=\dfrac{7}{24}$, $\cdots$, $a_{24}=\dfrac{95}{24}$ 이므로

$a_1+a_2+\cdots+a_{23}+a_{24}=49$, 즉 $k=49$

가능한 순서쌍의 개수가 1 이므로

구하는 k의 값은 49

(i) ~ (vii)에 의하여 모든 k의 값의 합은

$40 + 9 + 36 + 52 + 17 + 34 + 50 + 66 + 49 = 353$