2025
확통

Ch① 경우의 수

TH①. 경우의 수 [3점]

2024년 7월 교육청모의고사

1. 세 문자 P, Q, R 중에서 중복을 허락하여 8개를 택해 일렬로 나열하려고 한다. 다음 조건이 성립하도록 나열하는 경우의 수는?

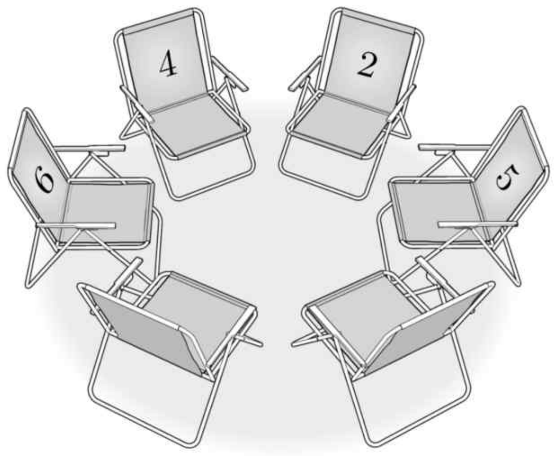
> 나열된 8개의 문자 중에서 세 문자 P, Q, R의 개수를 각각 p, q, r이라 할 때 $1 \leq p < q < r$이다.

① 440　② 448　③ 456
④ 464　⑤ 472

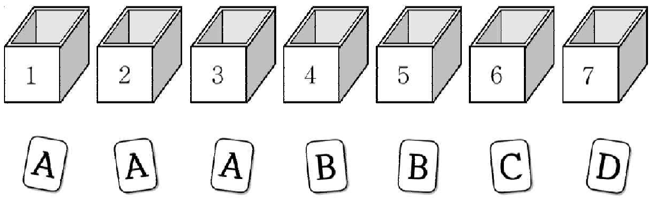
2025학년도 6월 평가원모의고사

2. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 합이 11이 되지 않도록 배열하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① 72　② 78　③ 84
④ 90　⑤ 96



3. 그림과 같이 문자 A, A, A, B, B, C, D가 각각 하나씩 적혀 있는 7장의 카드와 1부터 7까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 7개의 빈 상자가 있다.



각 상자에 한 장의 카드만 들어가도록 7장의 카드를 나누어 넣을 때, 문자 A가 적혀 있는 카드가 들어간 3개의 상자에 적힌 수의 합이 홀수가 되도록 나누어 넣는 경우의 수는? (단, 같은 문자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.)

① 144 ② 168 ③ 192
④ 216 ⑤ 240

4. 다음 조건을 만족시키는 10 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는?
[3점]

(가) $a \times b \times c \times d = 108$
(나) a, b, c, d 중 서로 같은 수가 있다.

① 32 ② 36 ③ 40
④ 44 ⑤ 48

5. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는?

(가) $ab^2c = 720$
(나) a와 c는 서로소가 아니다.

① 38 ② 42 ③ 46
④ 50 ⑤ 54

6. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수는?

(가) $x = 1,\ 2,\ 3$일 때 $f(x) \le f(x+1)$이다.
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 2이다.

① 50 ② 60 ③ 70
④ 80 ⑤ 90

TH②. 경우의 수 [4점]

2024년 7월 교육청모의고사

7. 두 집합

$$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\},\ \ Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\to Y$의 개수를 구하시오.

> (가) $f(1)\le f(2)\le f(1)+f(3)\le f(1)+f(4)$
> (나) $f(1)+f(2)$는 짝수이다.

2025년 6월 평가원모의고사

8. 집합 $X=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\to X$의 개수를 구하시오.

> (가) X의 모든 원소 x에 대하여 $x+f(x)\in X$이다.
> (나) $x=-2,\ -1,\ 0,\ 1$일 때 $f(x)\ge f(x+1)$이다.

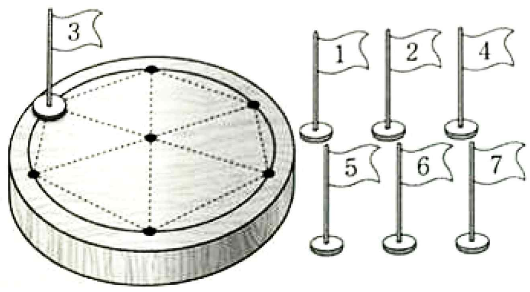
2024년 5월 교육청모의고사

9. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c+d+e=11$
(나) $a+b$는 짝수이다.
(다) a, b, c, d, e 중에서 짝수의 개수는 2 이상이다.

10. 그림과 같이 원판에 반지름의 길이가 1인 원이 그려져 있고, 원의 둘레를 6등분하는 6개의 점과 원의 중심이 표시되어 있다. 이 7개의 점에 1부터 7까지의 숫자가 하나씩 적힌 깃발 7개를 각각 한 개씩 놓으려고 할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

깃발이 놓여 있는 7개의 점 중 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이 한 변의 길이가 1인 정삼각형일 때, 세 꼭짓점에 놓여 있는 깃발에 적힌 세 수의 합은 12 이하이다.



11. 세 명의 학생에게 서로 다른 종류의 초콜릿 3개와 같은 종류의 사탕 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 사탕을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

(가) 적어도 한 명의 학생은 초콜릿을 받지 못한다.
(나) 각 학생이 받는 초콜릿의 개수와 사탕의 개수의 합은 2 이상이다.

12. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하시오.

(가) $f(1) \leq f(2) \leq f(3)$
(나) $1 < f(5) < f(4)$
(다) $f(a)=b$, $f(b)=a$를 만족시키는 집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b가 존재한다.

2025학년도 사관학교

13. 숫자 1, 1, 2, 2, 4, 4, 4가 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 서로 이웃한 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 차를 각각 a, b, c, d, e, f라 하자. 예를 들어 그림과 같이 나열한 경우 $a=3$, $b=1$, $c=1$, $d=3$, $e=0$, $f=2$이다.

$\boxed{4}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{2}$

$a+b+c+d+e+f$의 값이 짝수가 되도록 카드를 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적혀 있는 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.)

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

2025학년도 9월 평가원모의고사

14. 흰 공 4개와 검은 공 4개를 세 명의 학생 A, B, C에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

(가) 학생 A가 받는 공의 개수는 0 이상 2 이하이다. (나) 학생 B가 받는 공의 개수는 2 이상이다.

1. [정답] ②

[해설]
주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (p, q, r)은 $(1, 2, 5)$ 또는 $(1, 3, 4)$이다.
(ⅰ) 순서쌍 (p, q, r)이 $(1, 2, 5)$인 경우 8개의 문자 P, Q, Q, R, R, R, R, R을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{8!}{2! \times 5!} = 168$
(ⅱ) 순서쌍 (p, q, r)이 $(1, 3, 4)$인 경우 8개의 문자 P, Q, Q, Q, R, R, R, R을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{8!}{3! \times 4!} = 280$
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여
$168 + 280 = 448$

2. [정답] ①

[출처]	2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 확률과 통계 27 [3.00점]

[해설]
전체 경우의 수는
$(6-1)! = 120$ …… ㉠
수의 합이 11이 되는 순서쌍은 $(5, 6)$이므로 5, 6이 이웃하게 원형으로 배열하는 경우의 수는 5, 6을 하나로 보고 배열하는 경우의 수와 같으므로
$(5-1)! \times 2! = 48$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 구하는 경우의 수는
$120 - 48 = 72$

3. [정답] ③

[해설]
문자 A가 적혀 있는 카드가 들어간 3개의 상자에 적힌 수의 합이 홀수가 되는 경우는 3개의 상자에 적힌 수 중 홀수가 1개이거나 홀수가 3개인 경우이다.
(ⅰ) 홀수가 적힌 상자가 1개인 경우
홀수가 적힌 상자 1개와 짝수가 적힌 상자 2개를 선택하는 경우의 수는
${}_4C_1 \times {}_3C_2 = 4 \times 3 = 12$
선택한 상자에 문자 A가 적혀 있는 카드를 나누어 넣는 경우의 수는
$\frac{3!}{3!} = 1$
나머지 4개의 상자에 남은 4장의 카드를 나누어 넣는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!1!1!} = 12$이므로
$12 \times 1 \times 12 = 144$
(ⅱ) 홀수가 적힌 상자가 3개인 경우
홀수가 적힌 상자 3개를 선택하는 경우의 수는
${}_4C_3 = 4$
선택한 상자에 문자 A가 적혀 있는 카드를 나누어 넣는 경우의 수는
$\frac{3!}{3!} = 1$
나머지 4개의 상자에 남은 4장의 카드를 나누어 넣는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!1!1!} = 12$이므로
$4 \times 1 \times 12 = 48$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$144 + 48 = 192$

4. 정답
[출제 의도]

5. [정답] ②

[해설]
$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$이다.
(ⅰ) $b = 1$인 경우
$ac = 2^4 \times 3^2 \times 5$이므로 a, c는 $2^4 \times 3^2 \times 5$의 약수이다.
가능한 순서쌍 (a, c)의 개수는 $2^4 \times 3^2 \times 5$의 약수의 개수와 같으므로
$(4+1) \times (2+1) \times (1+1) = 5 \times 3 \times 2 = 30$
이 중 a와 c가 서로소인 경우는 a와 c의 공약수가 1뿐인 경우이므로
2^4이 a 또는 c의 약수이고
3^2이 a 또는 c의 약수이고
5가 a 또는 c의 약수인 순서쌍 (a, c)의 개수는
${}_2\Pi_3 = 8$
서로소가 아닌 자연수 a, c의 모든 순서쌍 (a, c)의 개수는 $30 - 8 = 22$
(ⅱ) $b = 2$인 경우
$ac = 2^2 \times 3^2 \times 5$이므로 a, c는 $2^2 \times 3^2 \times 5$의 약수이다.
가능한 순서쌍 (a, c)의 개수는 $2^2 \times 3^2 \times 5$의 약수의 개수와 같으므로
$(2+1) \times (2+1) \times (1+1) = 3 \times 3 \times 2 = 18$
이 중 a와 c가 서로소인 경우는 a와 c의 공약수가 1뿐인 경우이므로
2^2이 a 또는 c의 약수이고
3^2이 a 또는 c의 약수이고
5가 a 또는 c의 약수인 순서쌍 (a, c)의 개수는
${}_2\Pi_3 = 8$
서로소가 아닌 자연수 a, c의 모든 순서쌍 (a, c)의 개수는 $18 - 8 = 10$
(ⅲ) $b = 3$인 경우
$ac = 2^4 \times 5$이므로 a, c는 $2^4 \times 5$의 약수이다.
가능한 순서쌍 (a, c)의 개수는 $2^4 \times 5$의 약수의 개수와 같으므로
$(4+1) \times (1+1) = 5 \times 2 = 10$
이 중 a와 c가 서로소인 경우는 a와 c의 공약수가 1뿐인 경우이므로
2^4이 a 또는 c의 약수이고
5가 a 또는 c의 약수인 순서쌍 (a, c)의 개수는
${}_2\Pi_2 = 4$
서로소가 아닌 자연수 a, c의 모든 순서쌍 (a, c)의 개수는 $10 - 4 = 6$
(ⅳ) $b = 4$인 경우
$ac = 3^2 \times 5$이므로 a와 c가 서로소가 아닌 모든 순서쌍 (a, c)는 $(3, 15)$ 또는 $(15, 3)$이므로 순서쌍의 개수는 2
(ⅴ) $b = 6$인 경우
$ac = 2^2 \times 5$이므로 a와 c가 서로소가 아닌 모든 순서쌍 (a, c)는 $(2, 10)$ 또는 $(10, 2)$이므로 순서쌍의 개수는 2
(ⅵ) $b = 12$인 경우

조건을 만족하는 순서쌍 (a, b)는 존재하지 않는다.

(ⅰ)~ (ⅵ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$22+10+6+2+2=42$

6. [정답] ④

7. [정답] 198

[해설]

조건 (가)에 의하여

$0 \le f(2)-f(1) \le f(3) \le f(4)$

조건 (나)에 의하여 $f(1)+f(2)$가 짝수이므로 두 수 $f(1)$과 $f(2)$는 모두 홀수이거나 모두 짝수이다. $f(2)-f(1)$은 0 또는 2 또는 4

(ⅰ) $f(2)-f(1)=0$인 경우

순서쌍 $(f(1), f(2))$는

$(1, 1)$ 또는 $(2, 2)$ 또는 $(3, 3)$ 또는

$(4, 4)$ 또는 $(5, 5)$ 또는 $(6, 6)$

$0 \le f(3) \le f(4)$이므로

순서쌍 $(f(3), f(4))$의 개수는

${}_6\mathrm{H}_2={}_7\mathrm{C}_2=21$

그러므로 $6\times21=126$

(ⅱ) $f(2)-f(1)=2$인 경우

순서쌍 $(f(1), f(2))$는

$(1, 3)$ 또는 $(2, 4)$ 또는

$(3, 5)$ 또는 $(4, 6)$

$2 \le f(3) \le f(4)$이므로

순서쌍 $(f(3), f(4))$의 개수는

${}_5\mathrm{H}_2={}_6\mathrm{C}_2=15$

그러므로 $4\times15=60$

(ⅲ) $f(2)-f(1)=4$인 경우

순서쌍 $(f(1), f(2))$는

$(1, 5)$ 또는 $(2, 6)$

$4 \le f(3) \le f(4)$이므로

순서쌍 $(f(3), f(4))$의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

그러므로 $2\times6=12$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$126+60+12=198$

8. [정답] 108

[출처]	2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 확률과 통계 30 [4.00점]

[해설]

집합 $X=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f는 조건 (가)에서

$x+f(x)\in X,\quad -x-2 \le f(x) \le -x+2$

$0 \le f(-2) \le 2,\ -1 \le f(-1) \le 2,\ -2 \le f(0) \le 2$

$-2 \le f(1) \le 1,\ -2 \le f(2) \le 0$

(ⅰ) $f(0)=-2$일 때

조건 (나)에 의하여 $f(-2)$, $f(-1)$의 순서쌍의 개수는

$2+3+4=9$

$f(1)$, $f(2)$의 값은 -2이다. 따라서 함수 f의 개수는

$9\times1=9$

(ⅱ) $f(0)=-1$일 때

조건 (나)에 의하여 $f(-2)$, $f(-1)$의 순서쌍의 개수는

$2+3+4=9$

$f(1)$, $f(2)$의 순서쌍의 개수는

$1+2=3$

따라서 함수 f의 개수는

$9\times3=27$

(ⅲ) $f(0)=0$일 때

조건 (나)에 의하여 $f(-2)$, $f(-1)$의 순서쌍의 개수는 0, 1, 2 중 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

$f(1)$, $f(2)$의 순서쌍의 개수는 0, -1, -2 중 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

따라서 함수 f의 개수는

$6\times6=36$

(ⅳ) $f(0)=1$일 때

조건 (나)에 의하여 $f(-2)$, $f(-1)$의 순서쌍의 개수는 1, 2 중 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

${}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2=3$

$f(1)$, $f(2)$의 순서쌍의 개수는

$1+2+3+3=9$

따라서 함수 f의 개수는

$9\times3=27$

(ⅴ) $f(0)=2$일 때

조건 (나)에 의하여 $f(-2)$, $f(-1)$의 값은 2이다.

$f(1)$, $f(2)$의 순서쌍의 개수는

$1+2+3+3=9$

따라서 함수 f의 개수는

$9\times1=9$

이상에서 함수 f의 개수는

$9+27+36+27+9=108$

[다른 풀이]

-2, -1, 0, 1, 2의 5개 중 중복을 허용하여 5개를 선택하는 중복조합의 수는

${}_5\mathrm{H}_5={}_9\mathrm{C}_4=126$

이때 가능하지 않은 경우의 수는

(ⅰ) $f(1)=2$일 때

선택할 수 없는 순서쌍은

$(2, 2, 2, 2, 2)$, $(2, 2, 2, 2, 1)$, $(2, 2, 2, 2, 0)$,

$(2, 2, 2, 2, -1)$, $(2, 2, 2, 2, -2)$

(ⅱ) $f(1)=1$일 때

선택할 수 없는 순서쌍은

$(2, 2, 2, 1, 2)$, $(2, 2, 1, 1, 1)$, $(2, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 1, 1)$

(ⅲ) $f(-2)=-1$ 또는 $f(-2)=-2$일 때

선택할 수 없는 경우의 수는 -2, -1 중에서 중복을 허용하여 5개를 선택하는 중복조합의 수와 같다.

${}_2\mathrm{H}_5={}_6\mathrm{C}_5=6$

(ⅳ) $(2, -2, -2, -2, -2)$, $(1, -2, -2, -2, -2)$,

$(0,\ -2,\ -2,\ -2,\ -2)$일 때

이상에서 구하는 경우의 수는

$126-5-4-6-3=108$

[다른 풀이]

$f(-2)$ 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2

$f(2)$ 가 가질 수 있는 값은 -2, -1, 0

$f(-2) \geq f(-1) \geq f(0) \geq f(1) \geq f(2)$ 이므로

$f(-2)-f(2)$ 의 값에 따라 가질 수 있는 경우의 수를 구하면

(ⅰ) $f(-2)-f(2)=0$ 일 때

가능한 순서쌍 $(f(-2), f(2))$ 는 $(0, 0)$

가능한 순서쌍 $(f(-1), f(0), f(1))$ 은 $(0, 0, 0)$

따라서 가능한 함수의 개수는 1

(ⅱ) $f(-2)-f(2)=1$ 일 때

가능한 순서쌍 $(f(-2), f(2))$ 는 $(0,\ -1)$, $(1, 0)$

각각의 경우에 가능한 순서쌍 $(f(-1), f(0), f(1))$ 의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_3$ 이므로 전체 함수의 개수는

$2\times{}_2\mathrm{H}_3=2\times4=8$

(ⅲ) $f(-2)-f(2)=2$ 일 때

가능한 순서쌍 $(f(-2), f(2))$ 는

$(0,\ -2)$, $(1,\ -1)$, $(2, 0)$

가능한 순서쌍 $(f(-1), f(0), f(1))$ 의 개수는

$(1,\ -1)$일 때 ${}_3\mathrm{H}_3$

$(0,\ -2)$, $(2, 0)$일 때 ${}_3\mathrm{H}_3-1$

따라서 가능한 함수의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_3+2\times({}_3\mathrm{H}_3-1)=28$

(ⅳ) $f(-2)-f(2)=3$ 일 때

가능한 순서쌍 $(f(-2), f(2))$ 는

$(1,\ -2)$, $(2,\ -1)$

각각의 경우에 가능한 순서쌍 $(f(-1), f(0), f(1))$ 의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_3-1$

따라서 가능한 함수의 개수는 $2\times({}_4\mathrm{H}_3-1)=38$

(ⅴ) $f(-2)-f(2)=4$ 일 때

가능한 순서쌍 $(f(-2), f(2))$ 는 $(2,\ -2)$

가능한 순서쌍 $(f(-1), f(0), f(1))$ 의 개수는 ${}_5\mathrm{H}_3-2$

따라서 가능한 함수의 개수는 ${}_5\mathrm{H}_3-2=33$

이상에서 조건을 만족시키는 함수의 개수는

$1+8+28+38+33=108$

9. 정답

[출제 의도]

10. 정답

[출제 의도]

11. [정답] 117

[해설]

(ⅰ) 1명의 학생이 초콜릿을 받지 못하는 경우

초콜릿을 받지 못하는 1명을 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$

남은 2명의 학생에게 초콜릿을 각각 2개, 1개씩 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2\times{}_1\mathrm{C}_1\times2!=6$

조건 (나)를 만족시키도록 초콜릿을 받지 못한 1명의 학생에게 사탕 2개, 초콜릿 1개를 받은 1명의 학생에게 사탕 1개를 나누어주고, 남은 사탕 2개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$이므로 $3\times6\times6=108$

(ⅱ) 2명의 학생이 초콜릿을 받지 못하는 경우

초콜릿을 받지 못하는 2명을 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$

남은 1명의 학생에게 초콜릿 3개를 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_3=1$

조건 (나)를 만족시키도록 초콜릿을 받지 못한 2명의 학생에게 사탕을 각각 2개씩 나누어 주고, 남은 사탕 1개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$

이므로 $3\times1\times3=9$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$108+9=117$

12. [정답] 90

[해설]

조건 (다)를 만족시키는 a, b에 대하여 $a<b$라고 하자.

(ⅰ) $a\in\{1, 2, 3\}$, $b\in\{1, 2, 3\}$인 경우

$f(a)>f(b)$이므로 조건 (가)에 모순이다.

(ⅱ) $a\in\{1, 2, 3\}$, $b\in\{4, 5\}$인 경우

가능한 (a, b)의 순서쌍은

$(1, 4)$, $(1, 5)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$

이 중 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍은

$(2, 5)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$뿐이다.

① $f(2)=5$, $f(5)=2$인 경우

조건 (가)를 만족시키도록 $f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{H}_1\times{}_1\mathrm{H}_1=5$

조건 (나)를 만족시키도록 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$이므로 함수 f의 개수는 $5\times3=15$

② $f(3)=4$, $f(4)=3$인 경우

조건 (가)를 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

조건 (나)에 의하여 $f(5)=2$

이므로 함수 f의 개수는 $10\times1=10$

③ $f(3)=5$, $f(5)=3$인 경우

조건 (가)를 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{H}_2={}_6\mathrm{C}_2=15$

조건 (나)를 만족시키도록 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1=2$이므로 함수 f의 개수는

$15\times2=30$

$f(2)=5$, $f(5)=2$이고 $f(3)=4$, $f(4)=3$이면 조건 (가)에 모순이므로 ①과 ②의 경우에서 중복되는 경우는 없다.

(ⅲ) $a\in\{4, 5\}$, $b\in\{4, 5\}$인 경우

$f(4)=5$, $f(5)=4$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

조건 (가)를 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{H}_3={}_7\mathrm{C}_3=35$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 함수의 개수는

$15+10+30+35=90$

13. [정답] ②

14. [정답] 93

[해설]
조건 (가)에서 학생 A가 받는 공의 개수가 0 이상 2 이하이고 조건 (나)에서 학생 B가 받는 공의 개수가 2 이상이므로 학생 A가 받는 공의 개수를 기준으로 나누면

(ⅰ) 학생 A가 받는 공의 개수가 0일 때

학생 B가 받는 공의 개수가 2, 3, 4인 경우의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허락하여 2, 3, 4개를 선택하는 경우의 수와 같고 나머지는 학생 C에게 주면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_2H_2+{}_2H_3+{}_2H_4={}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4=12$$

학생 B가 받는 공의 개수가 5, 6, 7, 8인 경우의 수는 학생 C가 받는 공의 개수가 서로 다른 2개에서 중복을 허락하여 0, 1, 2, 3개를 선택하는 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

$${}_2H_0+{}_2H_1+{}_2H_2+{}_2H_3={}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3=10$$

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 0인 경우의 수는

$$12+10=22$$

(ⅱ) 학생 A가 받는 공의 개수가 1일 때

학생 A가 공을 받는 경우의 수는 흰 공 또는 검은 공의 2가지

학생 B가 받는 공의 개수가 2, 3인 경우의 수는

$${}_2H_2+{}_2H_3={}_3C_2+{}_4C_3=7$$

학생 B가 받는 공의 개수가 4, 5, 6, 7인 경우의 수는 학생 C가 받는 공의 개수가 0, 1, 2, 3인 경우의 수와 같으므로

$${}_2H_0+{}_2H_1+{}_2H_2+{}_2H_3={}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3=10$$

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 1인 경우의 수는

$$2\times(7+10)=34$$

(ⅲ) 학생 A가 받는 공의 개수가 2일 때

(a) 학생 A가 같은 색의 공을 받은 경우

학생 A가 같은 색의 공을 받은 경우의 수는

2가지

학생 B가 받는 공의 개수가 2인 경우의 수는

$${}_2H_2={}_3C_2=3$$

학생 B가 받는 공의 개수가 3인 경우의 수는 학생 A가 받은 공과 같은 공의 개수가 0, 1, 2인 경우

3가지

학생 B가 받는 공의 개수가 4, 5, 6인 경우의 수는 학생 C가 받는 공의 개수가 0, 1, 2인 경우의 수와 같으므로

$${}_2H_0+{}_2H_1+{}_2H_2={}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2=6$$

따라서 학생 A가 같은 색의 공 2개를 받는 경우의 수는

$$2\times(3+3+6)=24$$

(b) 학생 A가 다른 색의 공을 받은 경우

학생 B가 받는 공의 개수가 2, 3인 경우의 수는

$${}_2H_2+{}_2H_3={}_3C_2+{}_4C_3=7$$

학생 B가 받는 공의 개수가 4, 5, 6인 경우의 수는 학생 C가 받는 공의 개수가 0, 1, 2인 경우의 수와 같으므로

$${}_2H_0+{}_2H_1+{}_2H_2={}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2=6$$

따라서 학생 A가 다른 색의 공 2개를 받은 경우의 수는

$$7+6=13$$

(a), (b)에서 학생 A가 받는 공의 개수가 2인 경우의 수는

$$24+13=37$$

이상에서 구하는 모든 경우의 수는

$$22+34+37=93$$

[다른 풀이]
조건 (가)에서 학생 A가 받는 공의 개수가 0 이상 2 이하이고 조건 (나)에서 학생 B가 받는 공의 개수가 2 이상이므로 학생 A가 받는 공의 개수를 기준으로 나누면

(ⅰ) 학생 A가 받는 공의 개수가 0일 때

두 학생 B, C에게 흰 공과 검은 공을 나누어주는 경우의 수는

$${}_2\mathrm{H}_4\times{}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_4\times{}_5\mathrm{C}_4=25$$

이때, 학생 B가 받는 공의 개수가 0인 경우의 1가지와 1인 경우의 2가지를 제외하면 학생 A가 받는 공의 개수가 0인 경우의 수는

$$25-3=22$$

(ⅱ) 학생 A가 받는 공의 개수가 1일 때

학생 A가 공을 받는 경우의 수는 흰 공 또는 검은 공의 2가지

두 학생 B, C에게 흰 공과 검은 공을 나누어주는 경우의 수는 흰 공 또는 검은 공이 1개 빠졌으므로

$${}_2\mathrm{H}_3\times{}_2\mathrm{H}_4={}_4\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_4=20$$

이때, 학생 B가 받는 공의 개수가 0인 경우의 1가지와 1인 경우의 2가지를 제외하면

$$20-3=17$$

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 1인 경우의 수는

$$2\times17=34$$

(ⅲ) 학생 A가 받는 공의 개수가 2일 때

(a) 학생 A가 같은 색의 공을 받은 경우

학생 A가 같은 색의 공을 받은 경우의 수는

2가지

두 학생 B, C에게 흰 공과 검은 공을 나누어주는 경우의 수는 흰 공 또는 검은 공이 2개 빠졌으므로

$${}_2\mathrm{H}_2\times{}_2\mathrm{H}_4={}_3\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_4=15$$

이때, 학생 B가 받는 공의 개수가 0인 경우의 1가지와 1인 경우의 2가지를 제외하면

$$15-3=12$$

따라서 학생 A가 같은 색의 공 2개를 받는 경우의 수는

$$2\times12=24$$

(b) 학생 A가 다른 색의 공을 받은 경우

두 학생 B, C에게 흰 공 3개와 검은 공 3개를 나누어주는 경우의 수는

$${}_2\mathrm{H}_3\times{}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_3=16$$

이때, 학생 B가 받는 공의 개수가 0인 경우의 1가지와 1인 경우의 2가지를 제외하면 학생 A가 다른 색의 공 2개를 받은 경우의 수는

$$16-3=13$$

(a), (b)에서 학생 A가 받는 공의 개수가 2인 경우의 수는

$$24+13=37$$

이상에서 구하는 모든 경우의 수는

$$22+34+37=93$$

Ch② 확률

① 주요문항 정리 [출제가능성↑]

TH①. 확률 [3점]

2025학년도 6월 평가원모의고사

1. 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 문자열 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 문자 a가 한 개만 포함되거나 문자 b가 한 개만 포함된 문자열이 선택될 확률은?

① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{41}{64}$ ③ $\frac{21}{32}$
④ $\frac{43}{64}$ ⑤ $\frac{11}{16}$

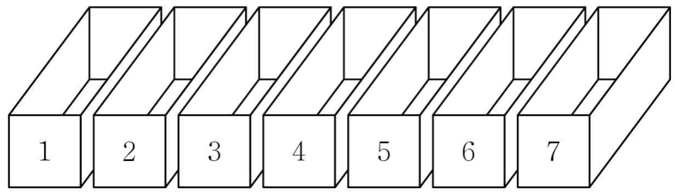
2024년 7월 교육청모의고사

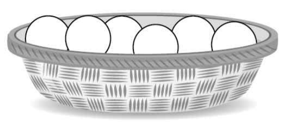
2. 공이 3개 이상 들어 있는 바구니와 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적힌 7개의 비어 있는 상자가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 n $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$일 때, 숫자 n이 적힌 상자에 공이 들어 있지 않으면 바구니에 있는 공 1개를 숫자 n이 적힌 상자에 넣고, 숫자 n이 적힌 상자에 공이 들어 있으면 바구니에 있는 공 1개를 숫자 7이 적힌 상자에 넣는다.

이 시행을 3번 반복한 후 숫자 7이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 1 이상일 확률은?

① $\frac{5}{18}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{7}{18}$
④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{1}{2}$





2025학년도 9월 평가원모의고사

3. 1부터 11까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 2개의 수를 선택한다. 선택한 2개의 수 중 적어도 하나가 7 이상의 홀수일 확률은?

① $\frac{23}{55}$ ② $\frac{24}{55}$ ③ $\frac{5}{11}$
④ $\frac{26}{55}$ ⑤ $\frac{27}{55}$

TH②. 확률 [4점]

2025학년도 사관학교

4. 흰 공 1개, 검은 공 6개, 노란 공 2개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내는 시행을 한다. 이 시행을 반복하여 주머니에 남아 있는 공의 색의 종류의 수가 처음으로 2가 되면 시행을 멈춘다. 시행을 멈출 때까지 꺼낸 공의 개수가 4일 때, 꺼낸 공 중에 흰 공이 있을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

EBS 연계문항

5. 탁자 위에 놓인 4개의 동전에 대하여 다음 시행을 한다.

4개의 동전 중 임의로 한 개의 동전을 택하여 한 번 뒤집는다.

처음에 3개의 동전은 앞면이 보이도록, 1개의 동전은 뒷면이 보이도록 놓여 있다. 위의 시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있을 때, 모두 앞면이 보이도록 놓여 있을 확률은?

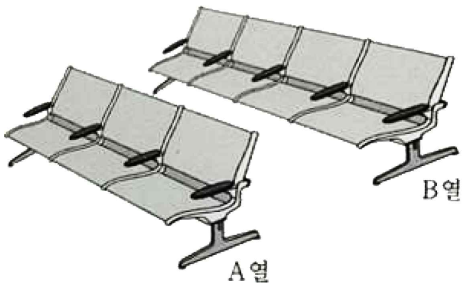
① $\frac{17}{32}$　② $\frac{35}{64}$　③ $\frac{9}{16}$
④ $\frac{37}{64}$　⑤ $\frac{19}{32}$

2025학년도 6월 평가원모의고사

6. 40개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 각각의 공은 흰 공 또는 검은 공 중 하나이다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 흰 공 2개를 꺼낼 확률을 p, 흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼낼 확률을 q, 검은 공 2개를 꺼낼 확률을 r이라 하자. $p=q$일 때, $60r$의 값을 구하시오. (단, $p>0$)

7. 그림과 같이 A열에 3개, B열에 4개로 구성된 총 7개의 좌석이 있다. 1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 3명 모두가 이 7개의 좌석 중 임의로 1개씩 선택하여 앉을 때, 다음 조건을 만족시키도록 앉을 확률은? (단, 한 좌석에는 한 명의 학생만 앉는다.) [4점]

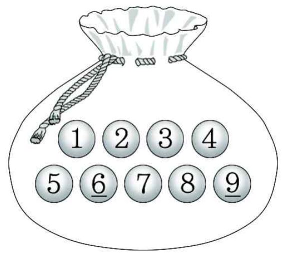
(가) A열의 좌석에는 서로 다른 두 학년의 학생들이 앉되, 같은 학년의 학생끼리는 이웃하여 앉는다.
(나) B열의 좌석에는 같은 학년의 학생끼리 이웃하지 않도록 앉는다.



① $\frac{2}{15}$ ② $\frac{16}{105}$ ③ $\frac{6}{35}$
④ $\frac{4}{21}$ ⑤ $\frac{22}{105}$

8. 주머니에 1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 공을 한 개씩 4번 꺼내어 나온 공에 적혀 있는 수를 꺼낸 순서대로 a, b, c, d라 하자. $a \times b+c+d$가 홀수일 때, 두 수 a, b가 모두 홀수일 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

① $\frac{5}{26}$ ② $\frac{3}{13}$ ③ $\frac{7}{26}$
④ $\frac{4}{13}$ ⑤ $\frac{9}{26}$



9. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 $f:X \to X$인 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택하는 시행을 한다. 이 시행에서 선택한 함수 f가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$가 짝수일 확률은?

> $a \in X$, $b \in X$에 대하여
> a가 b의 약수이면 $f(a)$는 $f(b)$의 약수이다.

① $\dfrac{9}{19}$ ② $\dfrac{8}{15}$ ③ $\dfrac{3}{5}$
④ $\dfrac{27}{40}$ ⑤ $\dfrac{19}{25}$

1. [정답] ③

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 확률과 통계 26 [3.00점]

[해설]
문자 a, b, c, d 중 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 문자열의 개수는

$${}_4\Pi_4 = 4^4$$

(ⅰ) a를 한 개만 포함할 때

네 자리 중 a가 들어갈 곳을 선택하는 경우의 수는

4가지

남은 세 자리에 b, c, d의 3개의 문자 중 중복을 허용하여 배열하는 경우의 수는

$${}_3\Pi_3$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$4\times{}_3\Pi_3 = 108$$

(ⅱ) b를 한 개만 포함할 때

(ⅰ)에서와 같은 방법으로 문자열의 개수는 108이다.

(ⅲ) a, b를 각각 한 개씩 포함할 때

네 자리 중 a, b가 들어갈 두 자리를 선택해서 a, b를 배열하는 경우의 수는

$${}_4\mathrm{P}_2$$

남은 두 자리에 c, d의 2개의 문자 중 중복을 허용하여 배열하는 경우의 수는

$${}_2\Pi_2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$${}_4\mathrm{P}_2\times{}_2\Pi_2 = 48$$

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{108+108-48}{4^4}=\frac{21}{32}$$

2. [정답] ④

[해설]
시행을 3번 반복한 후 숫자 7이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수는 0 또는 1 또는 2이다. 시행을 3번 반복한 후 숫자 7이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 0인 사건을 A라 하자. 주사위를 3번 던져 나온 눈의 수가 모두 다를 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_6\mathrm{P}_3}{6^3}=\frac{120}{216}=\frac{5}{9}$$

따라서 여사건의 확률에 의하여

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$$

[다른 풀이]
시행을 3번 반복한 후 숫자 7이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수는 0 또는 1 또는 2이다. 시행을 3번 반복한 후 숫자 7이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 1 이상인 사건을 A라 하자.

(ⅰ) 시행을 3번 반복한 후 숫자 7이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 1일 확률은 두 개의 눈의 수는 같고 하나는 다른 눈의 수가 나오는 확률과 같으므로

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1\times\frac{3!}{2!}}{6^3}=\frac{5}{12}$$

(ⅱ) 시행을 3번 반복한 후 숫자 7이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 2일 확률은 주사위를 3번 던져 나온 눈의 수가 모두 같은 사건의 확률과 같으므로

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_1}{6^3}=\frac{1}{36}$$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{12}+\frac{1}{36}=\frac{4}{9}$$

3. [정답] ⑤

[해설]
1부터 11까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 2개의 수를 선택하는 모든 경우의 수는

$${}_{11}C_2=\frac{11\times10}{2}=55$$

(ⅰ) 7이상의 홀수가 1개일 때

7이상의 홀수에서 1개, 그 외의 숫자에서 1개를 선택하는 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

$${}_3C_1\times{}_8C_1=3\times8=24$$

(ⅱ) 7이상의 홀수가 2개일 때

7이상의 홀수에서 2개를 선택하는 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

$${}_3C_2=3$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 경우의 수는 $24+3=27$

따라서 구하는 확률은 $\frac{27}{55}$ 이다.

4. [정답] 13

5. [정답] ①

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 확률과 통계 28 [4.00점]

[해설]
동전 4개를 왼쪽부터 차례대로 ①, ②, ③, ④, 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 할 때 동전 4개의 순서쌍 (H, H, H, T)에서 동전 1개를 뒤집는 시행을 5회 시행한 후 모든 면이 같아야 한다.

(ⅰ) 5회 시행한 후 모든 면이 앞면일 때,

①, ②, ③, ④를 뒤집은 횟수의 순서쌍이

(1) $(0, 0, 4, 1)$일 때

구하는 경우의 수는 3개의 H 중 4번 뒤집을 하나를 선택하고 4개의 H와 1개의 T를 배열하는 경우의 수와 같다.

$$3\times\frac{5!}{4!}=15$$

(2) $(0, 2, 2, 1)$일 때

구하는 경우의 수는 3개의 H 중 뒤집지 않을 하나를

선택하고 선택한 2개의 H를 ①, ②라 하면 ①, ①, ②, ②, ④를 배열하는 경우의 수와 같다.

$$3\times\frac{5!}{2!2!}=90$$

(3) $(0, 0, 2, 3)$일 때

구하는 경우의 수는 3개의 H 중 2번 뒤집을 하나를 선택하고 2개의 H와 3개의 T를 배열하는 경우의 수와 같다.

$$3\times\frac{5!}{2!3!}=30$$

(4) $(0, 0, 0, 5)$일 때

경우의 수는 1이다.

이상에서 모두 앞면이 나오는 경우의 수는

$$15+90+30+1=136$$

(ⅱ) 5회 시행한 후 모든 면이 앞면일 때,

①, ②, ③, ④를 뒤집은 횟수의 순서쌍이

(1) $(1, 1, 1, 2)$일 때

구하는 경우의 수는 ①, ②, ③, ④, ④를 배열하는 경우의 수와 같다.

$$\frac{5!}{2!}=60$$

(2) $(1, 1, 3, 0)$일 때

구하는 경우의 수는 3번 뒤집을 H를 선택하고 ①, ①, ①, ②, ③을 배열하는 경우의 수와 같다.

$$3\times\frac{5!}{3!}=60$$

이상에서 모두 뒷면이 나오는 경우의 수는

$$60+60=120$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{136}{136+120}=\frac{136}{256}=\frac{17}{32}$$

6. [정답] 6

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 확률과 통계 29 [4.00점]

[해설]

40개의 공 중 흰 공의 개수를 x라 하면

$$p=\frac{{}_{x}\mathrm{C}_2}{{}_{40}\mathrm{C}_2},\ q=\frac{{}_{40-x}\mathrm{C}_1\times{}_{x}\mathrm{C}_1}{{}_{40}\mathrm{C}_2}$$

이때, $p=q$이므로

$${}_{x}\mathrm{C}_2={}_{40-x}\mathrm{C}_1\times{}_{x}\mathrm{C}_1,\qquad \frac{x(x-1)}{2}=x(40-x)$$

$$3x(x-27)=0$$

$$\therefore\ x=27$$

따라서

$$60r=60\times\frac{{}_{13}\mathrm{C}_2}{{}_{40}\mathrm{C}_2}=60\times\frac{1}{10}=6$$

7. 정답

[출제 의도]

8. [정답] ②

[해설]

$a\times b+c+d$가 홀수인 사건을 A,

두 수 a, b가 모두 홀수인 사건을 B라 하자.

$a\times b+c+d$가 홀수인 경우는 $a\times b$가 홀수이고 $c+d$가 짝수인 경우 또는 $a\times b$가 짝수이고 $c+d$가 홀수인 경우이다.

(ⅰ) $a\times b$가 홀수이고 $c+d$가 짝수인 경우

순서쌍 (a, b, c, d)는 (홀수, 홀수, 홀수, 홀수) 또는 (홀수, 홀수, 짝수, 짝수)이므로

(홀수, 홀수, 홀수, 홀수)일 확률은 $\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{126}$

(홀수, 홀수, 짝수, 짝수)일 확률은 $\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{5}{63}$ $a\times b$가

홀수이고 $c+d$가 짝수일 확률은 $\frac{5}{126}+\frac{5}{63}=\frac{5}{42}$

(ⅱ) $a\times b$가 짝수이고 $c+d$가 홀수인 경우

순서쌍 (a, b, c, d)는

(홀수, 짝수, 홀수, 짝수) 또는 (홀수, 짝수, 짝수, 홀수) 또는

(짝수, 홀수, 홀수, 짝수) 또는 (짝수, 홀수, 짝수, 홀수) 또는

(짝수, 짝수, 홀수, 짝수) 또는 (짝수, 짝수, 짝수, 홀수)이므로

(홀수, 짝수, 홀수, 짝수)일 확률은 $\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{5}{63}$

(홀수, 짝수, 짝수, 홀수)일 확률은 $\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{5}{63}$

(짝수, 홀수, 홀수, 짝수)일 확률은 $\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{5}{63}$

(짝수, 홀수, 짝수, 홀수)일 확률은 $\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{5}{63}$

(짝수, 짝수, 홀수, 짝수)일 확률은 $\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{126}$

(짝수, 짝수, 짝수, 홀수)일 확률은 $\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{126}$

$a\times b$가 짝수이고 $c+d$가 홀수일 확률은

$$\frac{5}{63}\times 4+\frac{5}{126}\times 2=\frac{20}{63}+\frac{5}{63}=\frac{25}{63}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{42}+\frac{25}{63}=\frac{65}{126}$$

$a\times b+c+d$가 홀수이고, 두 수 a, b가 모두 홀수일 확률은 (ⅰ)에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{42}$$

따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

$$=\frac{\frac{5}{42}}{\frac{65}{126}}=\frac{3}{13}$$

[다른 풀이]

$a\times b+c+d$가 홀수인 사건을 A, 두 수 a, b가 모두 홀수인 사건을 B라 하자. 네 수 a, b, c, d가 모두 짝수이면 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 네 수 a, b, c, d 중 홀수의 개수는 1 이상이다.

(ⅰ) 홀수의 개수가 1인 경우
순서쌍 (a, b, c, d)는
(짝수, 짝수, 홀수, 짝수) 또는
(짝수, 짝수, 짝수, 홀수)이므로
$2\times\dfrac{{}_5\mathrm{P}_1\times{}_4\mathrm{P}_3}{{}_9\mathrm{P}_4}=\dfrac{5}{63}$

(ⅱ) 홀수의 개수가 2인 경우
순서쌍 (a, b, c, d)는
(홀수, 홀수, 짝수, 짝수) 또는 (홀수, 짝수, 홀수, 짝수) 또는
(홀수, 짝수, 짝수, 홀수) 또는 (짝수, 홀수, 홀수, 짝수) 또는
(짝수, 홀수, 짝수, 홀수)이므로 $5\times\dfrac{{}_5\mathrm{P}_2\times{}_4\mathrm{P}_2}{{}_9\mathrm{P}_4}=\dfrac{25}{63}$

(ⅲ) 홀수의 개수가 3인 경우 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅳ) 홀수의 개수가 4인 경우 순서쌍
(a, b, c, d)는 (홀수, 홀수, 홀수, 홀수)이므로 $\dfrac{{}_5\mathrm{P}_4}{{}_9\mathrm{P}_4}=\dfrac{5}{126}$

(ⅰ)~ (ⅳ)에 의하여
$\mathrm{P}(A)=\dfrac{5}{63}+\dfrac{25}{63}+\dfrac{5}{126}=\dfrac{65}{126}$

$a\times b+c+d$가 홀수이고, 두 수 a, b가 모두 홀수인 경우는 순서쌍 (a, b, c, d)가 (홀수, 홀수, 짝수, 짝수) 또는 (홀수, 홀수, 홀수, 홀수)이므로
(ⅱ), (ⅳ)에 의하여
$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{5}{63}+\dfrac{5}{126}=\dfrac{5}{42}$

따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

$$=\frac{\frac{5}{42}}{\frac{65}{126}}=\frac{3}{13}$$

9. [정답] ④

[해설]
집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 $f: X\rightarrow X$인 모든 함수 f에서 $a\in X$, $b\in X$에 대하여 a가 b의 약수이면 $f(a)$는 $f(b)$의 약수이므로

(ⅰ) $f(1)=1$일 때
1은 2, 3, 4의 약수이고 3은 2와 4의 약수가 아니므로 가능한 $f(3)$의 값은 1, 2, 3, 4의 4가지이고
(a) $f(2)=1$인 경우
가능한 $f(4)$의 값은 1, 2, 3, 4의 4가지
(b) $f(2)=2$인 경우
가능한 $f(4)$의 값은 2, 4의 2가지
(c) $f(2)=3$인 경우
가능한 $f(4)$의 값은 3의 1가지
(d) $f(2)=4$인 경우
가능한 $f(4)$의 값은 4의 1가지
따라서 $f(1)=1$일 때 함수 f의 개수는
$4\times(4+2+1+1)=32$
이때, $f(4)$가 짝수인 함수 f의 개수는
$4\times5=20$

(ⅱ) $f(1)=2$일 때
가능한 $f(2)$의 값은 2, 4의 2가지
(a) $f(2)=2$일 때
가능한 $f(3)$의 값은 2, 4의 2가지
가능한 $f(4)$의 값은 2, 4의 2가지
(b) $f(2)=4$일 때
가능한 $f(3)$의 값은 2, 4의 2가지
가능한 $f(4)$의 값은 4의 1가지
따라서 $f(1)=2$일 때 함수 f의 개수는
$2\times2+2=6$
이때, $f(4)$가 짝수인 함수 f의 개수는 6

(ⅲ) $f(1)=3$일 때
$f(2)=f(3)=f(4)=3$이어야 하므로 함수 f의 개수는 1
이때, $f(4)$가 짝수인 함수 f는 존재하지 않는다.

(ⅳ) $f(1)=4$일 때
$f(2)=f(3)=f(4)=4$이어야 하므로 함수 f의 개수는
1
이때, $f(4)$가 짝수인 함수 f의 개수는 1

이상에서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$32+6+1+1=40$
$f(4)$가 짝수인 함수 f의 개수는
$20+6+1=27$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{27}{40}$이다.

[다른 풀이]
집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 $f: X\rightarrow X$인 모든 함수 f에서 $a\in X$, $b\in X$에 대하여 a가 b의 약수이면 $f(a)$는 $f(b)$의 약수이므로
$f(1)\le f(2)\le f(4)$, $f(1)\le f(3)$
을 만족시킨다.

(ⅰ) $f(1)=1$일 때
$f(2)$, $f(4)$는 1, 2, 4에 대응되거나 1, 3에 대응되어야 하고, 모두 1에 대응되는 경우는 중복이므로 가능한 경우의 수는
${}_3\mathrm{H}_2+{}_2\mathrm{H}_2-1={}_4\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2-1=8$
$f(3)$은 모든 원소에 대응될 수 있으므로 가능한 경우의 수는
4
따라서 $f(1)=1$일 때 함수 f의 개수는
$8\times4=32$
이때, $f(4)$가 짝수인 경우는
$f(4)=2$일 때, $f(2)$의 값은 1, 2의 2가지
$f(4)=4$일 때, $f(2)$의 값은 1, 2, 4의 3가지
이므로 $f(4)$가 짝수인 함수 f의 개수는
$(2+3)\times4=20$

(ⅱ) $f(1)=2$일 때
$f(2)$, $f(4)$는 2 또는 4에 대응될 수 있으므로 가능한 경우의 수는
${}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2=3$
$f(3)$은 2 또는 4에 대응될 수 있으므로 가능한 경우의 수는
2
따라서 $f(1)=2$일 때 함수 f의 개수는
$3\times2=6$

이때, $f(4)$ 는 항상 짝수이므로 $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수는

6

(iii) $f(1)=3$ 일 때

$f(2)=f(3)=f(4)=3$ 이어야 하므로 함수 f 의 개수는 1

이때, $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 는 존재하지 않는다.

(iv) $f(1)=4$ 일 때

$f(2)=f(3)=f(4)=4$ 이어야 하므로 함수 f 의 개수는

1

이때, $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수는 1

이상에서 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는

$32+6+1+1=40$

$f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수는

$20+6+1=27$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{27}{40}$ 이다.

TH①. 통계

2025학년도 사관학교

1. 흰 공 1개, 검은 공 1개, 파란 공 1개, 빨간 공 1개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 하나의 공을 꺼내어 색을 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복하여 확인한 색의 종류의 수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(64X-10)$의 값을 구하시오.

2025학년도 사관학교

2. 어느 사관학교 생도의 일주일 수면 시간은 평균이 45시간, 표준편차가 1시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 사관학교 생도 중 임의추출한 36명의 일주일 수면 시간의 표본평균이 44시간 45분 이상이고 45시간 20분 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915 ② 0.8185 ③ 0.8413 ④ 0.9104 ⑤ 0.9772

3. 두 양수 m, σ에 대하여 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 1^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m^2+2m+16,\ \sigma^2)$을 따르고, 두 확률변수 X, Y는

$$\mathrm{P}(X \le 0)=\mathrm{P}(Y \le 0)$$

을 만족시킨다. σ의 값이 최소가 되도록 하는 m의 값을 m_1이라 하자. $m=m_1$일 때, 두 확률변수 X, Y에 대하여

$$\mathrm{P}(X \ge 1)=\mathrm{P}(Y \le k)$$

를 만족시키는 상수 k의 값을 구하시오.

4. 이산확률변수 X가 가지는 값이 0부터 4까지의 정수이고

$$\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(X=k+2)\ \ (k=0,\ 1,\ 2)$$

이다. $\mathrm{E}(X^2)=\frac{35}{6}$일 때, $\mathrm{P}(X=0)$의 값은?

① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{8}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{5}{24}$

5. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 6^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$, 정규분포 $\mathrm{N}(6,\ 2^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자.

$$\mathrm{P}(\overline{X} \le 12) + \mathrm{P}(\overline{Y} \ge 8) = 1$$

이 되도록 하는 m의 값은?

① 5 ② $\frac{13}{2}$ ③ 8 ④ $\frac{19}{2}$ ⑤ 11

2025학년도 9월 평가원모의고사

6. 수직선의 원점에 점 A가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가
> 4 이하이면 점 A를 양의 방향으로 1만큼 이동시키고,
> 5 이상이면 점 A를 음의 방향으로 1만큼 이동시킨다.

이 시행을 16200번 반복하여 이동된 점 A의 위치가 5700 이하일 확률을 다음 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 하자. $1000 \times k$의 값을 구하시오.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494

1. [정답] 165

2. [정답] ④

3. [정답] 70

[해설]
두 확률변수 X, Y가 정규분포를 따르므로 Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,

$P(X \le 0) = P(Z \le -m)$

$P(Y \le 0) = P\left(Z \le \dfrac{-(m^2+2m+16)}{\sigma}\right)$

$P(X \le 0) = P(Y \le 0)$에서

$-m = \dfrac{-(m^2+2m+16)}{\sigma}$

$\sigma = \dfrac{m^2+2m+16}{m} = m+2+\dfrac{16}{m}$

$m>0$, $\dfrac{16}{m}>0$이므로

절대부등식의 성질에 의하여

$\sigma \ge 2+2\sqrt{m\times\dfrac{16}{m}} = 10$

$m=\dfrac{16}{m}$일 때, σ의 값이 최소이므로

$m_1 = 4$

$m=4$일 때, 두 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $N(4,\ 1^2)$, $N(40,\ 10^2)$을 따르므로

$P(X \ge 1) = P\left(Z \ge \dfrac{1-4}{1}\right) = P(Z \ge -3)$

$P(Y \le k) = P\left(Z \le \dfrac{k-40}{10}\right)$

$P(X \ge 1) = P(Y \le k)$에서

$P(Z \ge -3) = P\left(Z \le \dfrac{k-40}{10}\right)$

$= P\left(Z \ge -\dfrac{k-40}{10}\right)$

$-3 = -\dfrac{k-40}{10}$

따라서 $k=70$

4. [정답] ④

[해설]
$P(X=0)=a$, $P(X=1)=b$라 하면

$P(X=k) = P(X=k+2)$ $(k=0,\ 1,\ 2)$에서

$P(X=0) = P(X=2) = P(X=4) = a$

$P(X=1) = P(X=3) = b$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	a	b	a	b	a	1

확률의 총합은 1이므로

$3a+2b=1$ ⋯⋯ ㉠

$E(X^2) = \dfrac{35}{6}$에서

$1^2\times b+2^2\times a+3^2\times b+4^2\times a = \dfrac{35}{6}$

$24a+12b=7$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=\dfrac{1}{6}$, $b=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ P(X=0) = \dfrac{1}{6}$

5. [정답] ③

[해설]
정규분포 $N(m,\ 6^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(m,\ 2^2)$을 따르고,
정규분포 $N(6,\ 2^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $N(6,\ 1)$을 따른다.

$P(\overline{X} \le 12) + P(\overline{Y} \ge 8) = 1$에서

$P(\overline{X} \le 12) = P\left(Z_{\overline{X}} \le \dfrac{12-m}{2}\right)$

$P(\overline{Y} \ge 8) = P\left(Z_{\overline{Y}} \ge \dfrac{8-6}{1}\right) = P(Z_{\overline{Y}} \ge 2)$

이므로

$\dfrac{12-m}{2} = 2$ $\therefore\ m=8$

6. [정답] 994

[해설]
한 개의 주사위를 던지는 시행을 16200번 반복할 때 4 이하의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 4 이하의 눈이 나올 확률은 $\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(16200,\ \dfrac{2}{3}\right)$을 따른다.

$E(X) = 16200\times\dfrac{2}{3} = 10800$

$V(X) = 16200\times\dfrac{2}{3}\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right) = 60^2$

이때 $n=16200$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(10800,\ 60^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-10800}{60}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이때 점 A의 위치가 5700 이하가 되려면 4 이하의 눈이 나오는 횟수 X는

$X-(16200-X) \le 5700$, $X \le 10950$

따라서 점 A의 위치가 5700 이하일 확률은

$\therefore\ P(X \le 10950) = P\left(Z \le \dfrac{10950-10800}{60}\right)$

$= P(Z \le 2.5)$

$$=0.5+\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2.5)$$
$$=0.5+0.494=0.994$$

$k=0.994$ 이므로

$$1000 \times k=1000 \times 0.994=994$$

김지형
대치예섬