상수함수와 정의역 제한을 통한 다항함수 추론

김지헌T

학생들에게 집합이나 함수에 대한 개념을 물어볼 때, (내가 본 많은 학생들은) 기본 개념은 확실히 잡혀있지만 실전에서 어떻게 활용 되는지에 대해 자신이 잘 모르고 있음을 인지는 하고 있었다.

기본 개념과 실전 개념의 간극, 그 중에서도 집합과 함수에 대해 이번 칼럼에서 알아보자.

우선 함수의 정의부터 천천히 떠올려보자. (아는 내용이니까 대충 보자 생각하지 말자!)

공집합이 아닌 두 집합 X, Y에서 집합 X의 원소에 집합 Y의 원소를 짝 지어주는 것을 집합 X에서 집합 Y로의 대응이라고 했었고, 이런 대응 중에서 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩만 대응할 때, 이 대응 f를 집합 X에서 집합 Y로의 함수라고 하며, $f: X \to Y$와 같이 나타낸다.

함수 중에서 본 칼럼의 제목에도 나온 상수함수에 대한 정의는 $f: X \to Y$에서 정의역 X의 모든 원소에 공역 Y의 단 하나의 원소를 대응할 때, 즉 $f(x)=c$일 때, 함수 f를 상수함수라고 한다.

"상수함수와 정의역 제한을 통한 다항함수 추론"의 칼럼을 소개하기에 앞서 기본 개념에 대해서 대략적으로 짚어봤지만, 많은 수험생이 '정의역 제한'이라는 단어에 대해 생소할 것이다.

정의역 X의 어떤 부분집합 A에 대하여 함수 $f: X \to Y$을 $f: A \to Y$와 같이 정의역을 제한하였을 때, 즉 f의 대응 규칙을 유지한 채 정의역만 A로 줄여 치역을 관찰하는 행위를 정의역 제한이라 하자.

이제 기본 개념이 충족됐으니, 실전 개념을 위해 적당한 예제를 하나 풀어보자.

1. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=2$, $f(2)=3$일 때 $f(3)$의 값을 구하시오.

다음과 같은 문제에서 다양한 풀이가 존재할 텐데, 쉬운 순서부터 차근차근 접근해보자.

우선, $f(x)$의 일차항의 계수와 상수항의 계수를 모르므로 각각을 두 상수 a, b라 할 수 있다.

$f(x)=x^2+ax+b$라 할 때 $f(1)=1+a+b=2$, $f(2)=4+2a+b=3$에서 두 식을 빼면 $a=-2$, $b=3$임을 쉽게 알아낼 수 있으므로 $f(3)=3^2-2\times3+3=6$이다. 이러한 과정을 다음과 같이 떠올려보자.

$f(x)=x^2+ax+b$라 할 때 우리는 어차피 주어진 식이 두 개이므로 ($f(1)=2$, $f(2)=3$) 두 상수 a, b의 값을 쉽게 찾아낼 수 있을 것이다. (어차피 $f(x)$의 식 자체는 확정되었다는 의미이다.)

$f(x)$가 다항함수이므로 정의역은 실수 전체의 집합일 것이며, 이는 구간으로 나타낼 때 $(-\infty, \infty)$이다. 즉, $f(x)$의 정의역은 $\{x|-\infty<x<\infty\}$이다. 정의역의 부분집합 중 $\{1, 2\}$를 떠올려보자.

함수 $f(x)$의 정의역을 실수 전체의 집합이 아닌 $\{1, 2\}$로 제한했을 때 역시 문제의 조건에서 위배되는 것은 없다! 어차피 함수 f가 확정되어있으니 정의역을 제한해보자.

우리는 집합 $\{1, 2\}$에서 치역의 원소가 0 뿐인 상수함수를 떠올릴 수 있으며, 이러한 상수함수 중 최고차항의 계수가 1인 이차함수인 것은 $(x-1)(x-2)$임을 쉽게 생각할 수 있다.

(상수함수의 정의가 무엇인지 천천히 읽어보면 이는 직관적으로 받아들일 수 있을 것이다.)

$g(x)=f(x)-(x-1)(x-2)$라 할 때, $g(x)$는 일차 이하의 다항함수일 것이며 $g(1)=2$, $g(2)=3$이다.

여기에서는 별 다른 계산과정 없이 $g(x)=x+1$이므로 $f(x)=(x-1)(x-2)+x+1$이다.

따라서 $f(3)=2+3+1=6$이다.

두 풀이 과정의 길이를 비교해보자면, 큰 차이가 없게 느껴질 수 있다.

$f(x)=x^2+ax+b$라 할 때 $f(1)=1+a+b=2$, $f(2)=4+2a+b=3$에서 $a=-2$, $b=3$이다.

vs

$g(x)=f(x)-(x-1)(x-2)$라 할 때, $g(x)=x+1$이므로 $f(x)=(x-1)(x-2)+x+1$이다.

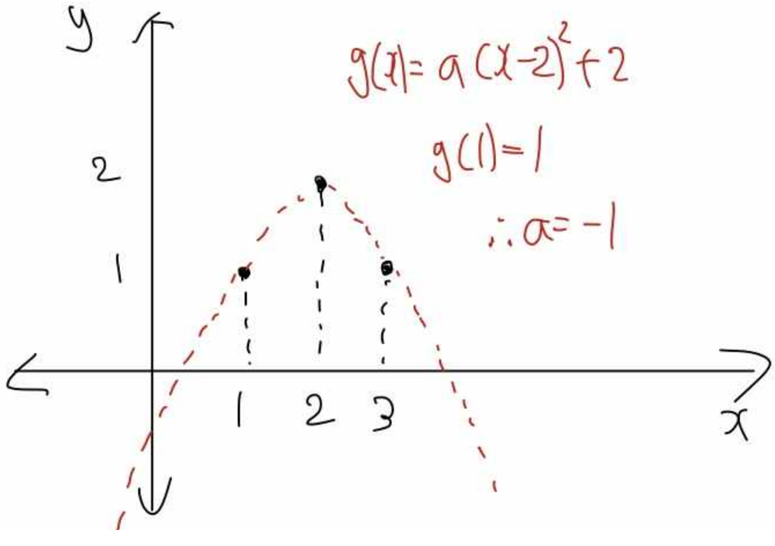
하지만 이 논리를 이차 또는 삼차 이상의 다항함수까지 확장하면 그 길이는 확연하게 차이가 난다.

다음과 같은 예제를 보자.

2. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=1$일 때 $f(4)$의 값을 구하시오.

우선, $f(x)$의 이차항과 일차항, 그리고 상수항의 계수를 모르므로 각각을 세 상수 a, b, c라 할 수 있다. 이에 따라 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하면 $f(1)=1+a+b+c=1$, $f(2)=8+4a+2b+c=2$, $f(3)=27+9a+3b+c=3$의 연립방정식을 가감법을 이용하여 풀 수 있다. (계산은 복잡하겠지만!)

함수 $f(x)$의 정의역을 실수 전체의 집합이 아닌 $\{1,\ 2,\ 3\}$로 제한했을 때 우리는 $\{1,\ 2,\ 3\}$에서 치역의 원소가 0 뿐인 상수함수를 떠올릴 수 있으며, 이러한 상수함수 중 최고차항의 계수가 1인 삼차함수인 것은 $(x-1)(x-2)(x-3)$임을 쉽게 생각할 수 있다. 앞선 방식과 동일하게 풀이를 전개하면, $g(x)=f(x)-(x-1)(x-2)(x-3)$는 이차 이하의 다항함수일 것이며 $g(1)=1$, $g(2)=2$, $g(3)=1$이다. 이차 이하의 다항함수에서 $x=2$를 기준으로 두 점 $(1,\ g(1))$과 $(3,\ g(3))$이 대칭을 이루고 있으므로 $g(x)=a(x-2)^2+2$라 할 때 $g(1)=1$에서 $a=-1$이므로 $g(x)=-(x-2)^2+2$이다.



즉, $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)-(x-2)^2+2$에서 $f(4)=3\times2\times1-2^2+2=4$이다.

이 예제에서 두 풀이 과정의 길이를 비교해보자!

$$f(1)=1+a+b+c=1,\ f(2)=8+4a+2b+c=2,\ f(3)=27+9a+3b+c=3\text{이므로}$$

$$f(2)-f(1)=7+3a+b=1\text{이고 } f(3)-f(2)=19+5a+b=1\text{에서 } a=-7,\ b=15\text{이다.}$$

$$f(1)=1-7+15+c=1\text{에서 } c=-8\text{이므로 } f(x)=x^3-7x^2+15x-8\text{이다.}$$

$$\text{따라서 } f(4)=4^3-7\times4^2+15\times4-8=4\text{이다.}$$

$$vs$$

$$g(x)=f(x)-(x-1)(x-2)(x-3)\text{이라 할 때, } g(x)=a(x-2)^2+2\text{이고 } g(1)=1\text{이므로 } a=-1\text{이다.}$$

$$\text{따라서 } f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)-(x-2)^2+2\text{이므로 } f(4)=3\times2\times1-2^2+2=4\text{이다.}$$

연립방정식을 풀 때에 비해 확연하게 계산의 길이가 줄어들었음을 볼 수 있다! (심지어 연립방정식에서 a와 b의 값을 구하는 과정이나 $f(4)$의 값을 구하는 과정은 상당히 복잡했다. 그에 비해

상수함수와 정의역 제한을 통한 풀이는 그 계산의

이러한 풀이과정을 볼 때 학생들은 다음과 같은 의문을 가질 수 있다.

만약 대칭을 이루지 않는 세 점이 주어진다면 어떻게 계산을 줄일 수 있을까?

다음과 같은 예제를 풀며 천천히 생각해보자.

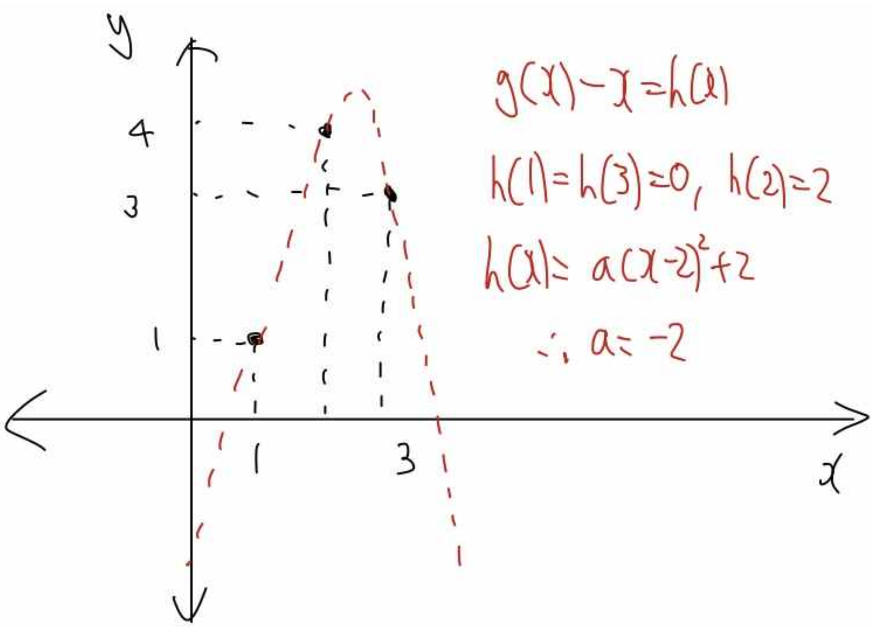
3. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=1,\ f(2)=4,\ f(3)=3$일 때 $f(4)$의 값을 구하시오.

앞선 풀이를 참고했을 때, $g(x)=f(x)-(x-1)(x-2)(x-3)$가 이차 이하의 다항함수일 것이다.

$x=1$에서 $x=2$까지의 평균변화율은 3이고 $x=2$에서 $x=3$까지의 평균변화율은 -1이므로

$g(x)$는 이차함수이고 대칭축은 $x=2$와 $x=3$ 사이에 존재할 것임을 추론할 수 있다.

이때, $g(3)=3$, $g(1)=1$에서 함수 $h(x)=g(x)-x$를 관찰하면 $h(3)=0$, $h(1)=0$에서 대칭축을 만들 수 있다! $h(2)=2$라 할 때 $h(x)=a(x-2)^2+2$이고 $h(1)=0$이므로 $a=-2$이다.



따라서 $g(x)=x-2(x-2)^2+2$이고 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+x-2(x-2)^2+2$이므로

$f(4)=3\times2\times1+4-2(4-2)^2+2=4$이다.

즉, 대칭축의 정확한 위치를 직관적으로 파악하기 힘들 때는 앞서 이차함수를 추론했던 과정과 동일하게 양 끝점을 지나는 일차함수를 빼서 대칭축을 임으로 맞춰 동일하게 풀 수 있다.

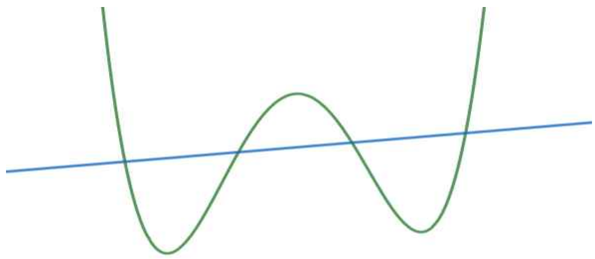
몇몇 학생은 기억할 수 있겠지만 이러한 사고과정을 거치는 문제는 평가원에서 이미 출제됐다!

2020학년도 9월 평가원 나형

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 네 개의 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선과 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선이 점 $(k,\ 0)$에서 만난다. $f(2k)=20$일 때, $f(4k)$의 값을 구하시오.

(단, k는 상수이다.) [4점]

수열의 정의가 ‘정의역이 자연수 전체의 집합인 함수’임을 떠올린다면 등차수열이 정의역 제한을 거친 일차함수임을 알 수 있고, 이에 따라 $f(x)=(x+1)x(x-1)(x-2)+ax+b$와 같이 나타낼 수 있다. 상수함수에 대한 개념이 기초된다면 이를 필연적인 풀이로써 이끌어낼 수 있게 되는 것이다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=ax+b$의 개형

만약 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고 $g(x)=f(x)-(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)$라는 삼차함수를 추론할 때는 어떻게 해야 될까? 삼차함수 f에 대한 g라는 이차함수에서는 대칭축을 통한 선대칭을 통해 다항함수를 추론했다면 삼차함수에서는 점대칭을 이용하여 추론을 하면 된다!

마지막 예제를 하나 풀어보며 본 칼럼을 마무리하자.

4. 원점을 지나는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여

$f(-2)=-20$, $f(2)=-4$, $f(4)=16$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

힌트를 가볍게 준다면 $x=-2$에서 $x=0$까지의 평균 변화율과 $x=2$에서 $x=4$까지의 평균변화율이 동일함을 통해 네 점이 $(1,\ -2)$에 대하여 점대칭을 이루고 있음을 관찰할 수 있다! 이에 따라 삼차함수를 찾으면 $f(3)=-15$임을 적은 계산을 통해 알아낼 수 있을 것이다. (풀이는 생략한다.)

수능은 모든 문제를 ‘시간 안에’ 푸는 것이 중요한 시험이라는 사실을 간과하지 말자!

본 기술은 다항함수의 미정계수를 찾는 과정에 있어 상당히 많은 계산 과정을 생략할 수 있도록 도와주므로 체화하여 학생들이 실전에서 자유자재로 활용할 수 있는 개념이 되길 바란다.

\- 김지헌T