연상 논술

Step3. 파이널 반

김태규 선생님 지음

I. 수리논술

1 수리논술이란 무엇인가?

인문계 논술에서 수리논술은
(1) '수학문제'를 정확하게 풀어서 답을 도출하고
(2) '친절한 해설지'를 작성하는 과정이다
(3) 주어진 상황을 정확하게 파악하고, 현실의 문제를 수식으로 정리하여, 각 선택지를 숫자로 증명한다.

2 문제풀이 순서

고득점 포인트는 '친절함'이다. 자세하게 설명하는 것이 당연히 중요하다.
하지만, 답을 못구하면 말짱 도루묵이다.
그러니 일단 정답부터 구하자.
정답을 구한 후에 남은시간을 보고, '얼마나 친절해질지'선택한다.

3 자잘한 팁

(1) 좌표평면 원점 표시
(2) 좌표평면 화살표 표시
(3) 좌표평면 변수표시
(4) 줄 그을 땐 신분증 활용하기
(5) 표/증감표/수형도 적극 활용
(6) 변수 범위 잘 지키기 (특히 정의역 범위)
(7) 시간 없으면 답이라도 쓴다
(8) 답을 못구했으면 풀이과정이라도 쓰고 기도한다 (한양대 상경급)
* 연세대 1문제, 경희대 2문제, 중앙대 5문제, 한양대 1문제를 수록해두었습니다.
지원 학교에 관계없이 최대한 많이 보시는 것을 추천드립니다.

II. 연습문제 풀이

1 연습문제1 연세대학교

문제 2-2. C국 소비자들은 아래 주어진 상황에 따라 행동한다. 각각의 상황에서 f(x), g(x), h(x)의 최댓값을 구하고, C국 소비자들의 태도에 따른 사회적 결과를 서술하시오.

소비자의 삶의 질 $f(x) = 20x - 2x^2$

기업가의 삶의 질 $g(x) = 8x - 2x^2$

다른 나라 사람들의 삶의 질 $h(x) = -x^3$

C국 소비자들이 탄소배출량(x)을 결정하는 조건

상황A. f(x)+g(x)가 최댓값이 되는 x

상황B. f(x)+g(x)+h(x)가 최댓값이 되는 x

II. 연습문제 풀이

1 연습문제1 연세대학교 예시답안

먼저, 상황 A의 경우 $x=3.5$에서 최대가 된다.

$f(x)+g(x)=-4x^2+28x$ (x는 탄소배출량이므로 0보다 크거나 같다).

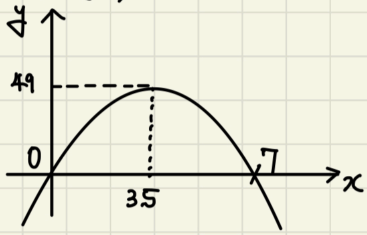
$=-4x(x-7)$이므로, 〈그림 1〉과 같이 나타낼 수 있다.

이때 $f(x), g(x), h(x)$에 각각 3.5를 대입하면,

$f(3.5)=45.5$, $g(3.5)=3.5$, $h(3.5)=-42.875$ 이다.

또, 전세계의 효용은 6.5이다.

〈그림 1〉



다음으로, 상황 B의 경우 $x=2$에서 최대가 된다.

$f(x)+g(x)+h(x)=-x^3-4x^2+28x$ $(x\geq 0)$를 새로운 함수 $k(x)$로 정의하고 미분하면 다음과 같다.

$$k(x)=-x^3-4x^2+28x \quad (x\geq 0)$$

$$k'(x)=-3x^2-8x+28$$

$$=(-x+2)(3x+14)$$

다항함수는 도함수가 0이 되는 x값에서 극값을 가진다는 점,

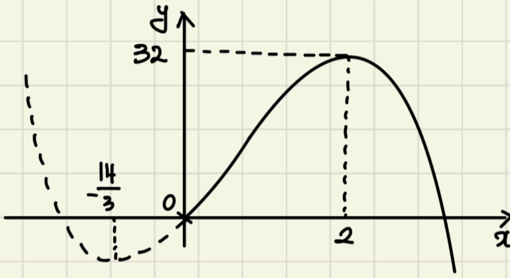
$k(x)$는 최고차항의 계수가 음수인 삼차함수인 점을 고려하면,

$k(x)$는 〈그림 2〉와 같이 나타낼 수 있다.

이때, $f(2)=32$ $g(2)=8$, $h(x)=-8$이다.

또, 전세계의 효용은 32이다.

〈그림 2〉



이상을 종합하면, 세계시민주의적 관점에 입각하여 타국의 이익도 고려할 때 C국 소비자 더 큰 효용을 누릴 수 있음을 알 수 있다. 자국민 외에 타국민의 효용 $h(x)$도 동시에 고려한 선택(상황2)을 할 때, 전세계의 효용이 6.5에서 32로 증가하며 C국 소비자의 효용도 3.5에서 8로 크게 증가한다. 따라서, 소비자들은 자국의 이익만 배타적으로 고려할 것이 아니라 세계시민주의적 관점에 입각하여 더 넓은 시각을 가져야 할 것이다.

II. 연습문제 풀이

2 연습문제2 경희대 사회(1)

[논제 Ⅲ]

국가 A에서 선거참여율과 행복 지수의 관계가 다음과 같은 조건을 만족한다고 하자.

① 선거참여율 x에 따른 행복 지수 y는 $y=-5x^2+ax+b$라는 이차함수의 형태를 따른다.

② 선거참여율의 범위는 $0 \le x \le 1$이다.

③ 행복 지수는 값이 작을수록 행복감이 낮다는 것을, 값이 클수록 행복감이 높다는 것을 의미한다.

④ 아무도 선거에 참여하지 않았을 때 행복 지수는 $\frac{3}{5}$이고, 모두 선거에 참여했을 때 행복 지수는 $\frac{18}{5}$이다.

(1) a와 b값을 구하고, 주어진 이차함수의 그래프를 그린 후 y절편과 $x=1$에서의 점의 좌표(x,y)를 표시하시오.

(2) 행복 지수가 최대가 되는 선거참여율을 구하고, 그 점에서의 행복 지수 값을 구한 후 (1)에서 그린 그래프 위에 점의 좌표(x,y)를 표시하시오.

(3) (1)과 (2)에서의 분석 결과를 토대로 제시문 [나]의 견해를 평가하시오.

[주어진 답안지 양식 범위 내에서 자유롭게 쓰시오.: 배점 35점]

[나]

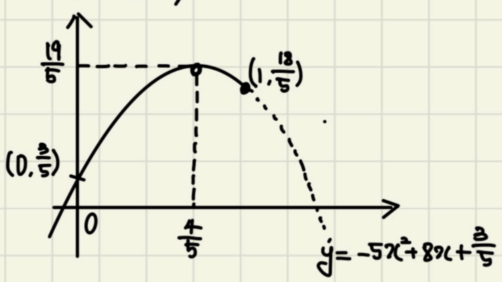
효과적인 정치 참여를 위해서는 많은 시간과 노력을 들여 정치적 지식과 정보를 습득하고 많은 비용을 감내하며 정치 활동을 해야 한다. 그런데 다른 사람이 충분한 정치적 지식과 정보를 가지고 헌신적으로 정치 활동을 한다면, 나는 그러한 노력과 비용을 들이지 않고 무임승차를 하는 것이 합리적이다. 또한 다른 사람이 정치 참여를 위한 노력과 비용을 들이지 않는다면, 나의 헌신적인 정치 참여는 의미가 없게 된다. 이처럼 수단의 합리성의 관점에서는 정치 참여가 그리 매력적이지 못하다. 더 나아가서 대부분의 시민들은 생업에 쫓겨 자신의 생활 영역에서 벗어난 문제, 특히 전국적인 문제나 자신의 이해관계에 직접 영향을 미치지 않는다고 생각하는 문제에 대해서는 관심이 없거나 관심을 쏟을 시간적 • 경제적 여유와 지적 능력이 충분하지 않다. 이렇게 볼 때, 과연 질적으로 수준 높은 시민의 참여가 보장될 수 있을 것인가라는 의문이 제기된다. 또한 양질의 정치 참여가 가능하다고 하더라도, 많은 참여 그 자체가 반드시 바람직한 것인가에 대한 의문이 있다. 과도한 참여는 다양한 요구를 산출하여 정치와 행정 과정에 많은 부담을 주게 된다. 그리하여 정치적 의사결정이 지연되고 결정된 의사의 일관성이 훼손될 가능성이 있다. 더 나아가서 결정된 의사를 집행하는 데에도 많은 어려움을 초래하여 정치적 혼란을 발생시킬 수도 있다.

2 연습문제2 경희대 사회(1) 예시답안

(1) y절편은 $\frac{3}{5}$, $x=1$일때 점의 좌표는 $(1, \frac{18}{5})$이다.

문제에서 x는 선거참여율이므로, ④조건에서 '아무도 선거에 참여하지 않았을 때'는 x가 0이다. '모두 선거에 참여했을 때'는 $x=1$이다. 따라서, ④에 의하면 행복지수 y는 두 점 $(0, \frac{3}{5})$, $(1, \frac{18}{5})$을 지난다.
$(0, \frac{3}{5})$을 y에 대입하면, $b=\frac{3}{5}$임을 알 수 있고 $(1, \frac{18}{5})$을 대입하면 $a=8$임을 알 수 있다.
이를 그래프로 나타내면 <그림 1>과 같다.

<그림 1>



(2) 행복지수가 최대가 되는 선거참여율은 $\frac{4}{5}$이고, 그 점에서 행복지수는 $\frac{19}{5}$이다.

y의 도함수 $y'=-10x+8$ 이므로, $x=\frac{4}{5}$에서 함수 y는 극값을 가지고 이는 <증감표 1>에서 확인할 수 있다.

<증감표 1>

x	$\cdots$	$\frac{4}{5}$	$\cdots$
y	↗	$\frac{19}{5}$ (극대)	↘
y'	+	0	−

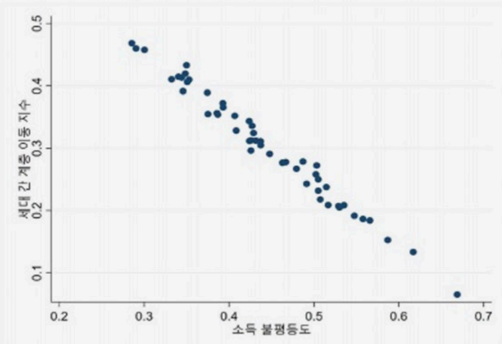
(3) 이를 바탕으로 보면, (나)의 주장은 대체로 타당하다. (나)는 개인은 선거에 참여하지 않는 것이 합리적이고 경제적인 선택임을 주장한다. 이는 <그림 1>에서 투표율이 80% 이상일 때 효용(행복)이 급감하는 것과 상통한다는 점에서 타당하다.

하지만, 투표율이 낮은 구간 $(x<0.8)$에서는 행복지수가 증가한다는 점에서 (나)의 주장은 한계가 있는 주장임을 알 수 있다.

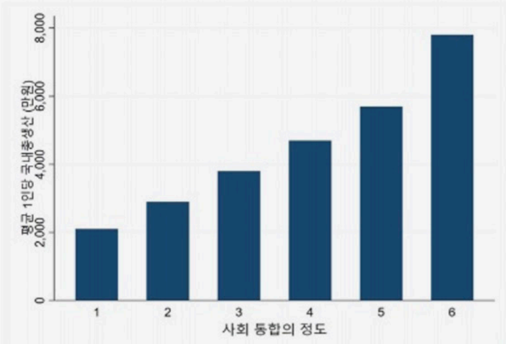
3 연습문제3 경희대 사회(2)

[논제 Ⅲ]

<자료 1>은 각 국가의 소득 불평등도와 세대 간 계층 이동을 조사한 후 그 관계를 그래프로 나타낸 것이다. 소득 불평등도를 나타내는 수치가 높을수록 그 사회의 소득 분배가 더 불평등하다는 것을 의미한다. 세대 간 계층 이동 지수는 세대 간 계층 이동의 정도를 수치로 측정한 것으로 이 수치가 높은 사회일수록 세대 간 계층 이동이 더 활발히 이루어진다. <자료 2>는 국가들을 사회 통합의 정도에 따라 6개의 집단으로 구분하고 각 집단별 평균 1인당 국내 총생산을 그래프로 나타낸 것이다. 사회 통합의 정도가 1에서 6으로 커질수록 더 통합적인 국가다.



<자료 1>



<자료 2>

(1) <자료 1>과 <자료 2>를 해석하고, 각각의 자료가 [논제 Ⅰ]의 두 관점 중 어느 쪽을 지지하는 근거가 될 수 있는지 설명하시오.

(2) 사회평등지수 x와 사회발전지수 y의 관계는 일차함수 $y=ax+b$로 표현되는데 이 일차함수와 그 계수들은 다음의 네 가지 조건들을 만족한다.

① $-2a+b=2$

② $a^2+b^2=8$

③ 사회평등지수는 0에서 1까지의 값을 가질 수 있다($0\le x\le 1$). 사회평등지수가 높을수록 그 사회는 더 평등하고, 그 지수가 낮을수록 사회는 더 불평등하다.

④ 주어진 사회평등지수의 구간($0\le x\le 1$)에서 y는 양의 값을 갖는다. 사회발전지수가 더 큰 값을 가질수록 더 높은 수준의 사회발전 정도를 나타낸다.

위의 조건들을 만족시키는 계수 a와 b를 갖는 일차함수를 구하시오. 이를 토대로 제시문 [라]를 평가하시오.
[수식을 사용하여 주어진 답안지 양식 범위 내에서 자유롭게 쓰시오.: 배점 35점]

3 연습문제3 경희대 사회(2) - 학교측 해설지

〈자료 1〉은 소득 불평등도가 높은 국가에서 세대 간 계층 이동이 덜 발생하는 것을 보여준다. 이는 사회 불평등이 지배 집단의 권력 및 강제에 의한 것으로, 기존의 불평등한 계층 구조를 재생산하게 된다고 보는 갈등론을 지지하는 근거가 될 수 있다. 〈자료 2〉는 더 통합적인 사회에서 개인의 생산성이 높은 것을 보여준다. 이는 사회 통합과 질서를 강조하는 기능론을 지지하는 근거가 될 수 있다.

(2) a와 b는 조건 ①과 조건 ②를 만족하는 연립이차방정식을 풀어서 구할 수 있다.

조건 ①에서 $b=2a+2$이므로 이것을 조건 ②에 대입하면

$a^2+(2a+2)^2=8$이고, 이것을 정리하면

$5a^2+8a-4=0$이다.

좌변을 인수분해하면 $(a+2)(5a-2)=0$이다.

따라서 $a=-2$ 또는 $a=\dfrac{2}{5}$

이를 조건 ①에 대입하면 $b=-2$ 또는 $b=\dfrac{14}{5}$

따라서 연립방정식의 해는 $\begin{cases} a=\dfrac{2}{5} \\ b=\dfrac{14}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases}$ 이다.

그런데 연립방정식의 해가 $a=-2$, $b=-2$인 경우 주어진 범위의 $x(0 \le x \le 1)$에 대해 y가 음의 값을 가지므로 조건 ④를 만족하지 않는다.

따라서 주어진 조건들을 모두 만족하는 a와 b는 $\begin{cases} a=\dfrac{2}{5} \\ b=\dfrac{14}{5} \end{cases}$ 이고

사회평등지수(x)와 사회발전지수(y)의 관계를 나타내는 일차 함수는

$y=\dfrac{2}{5}x+\dfrac{14}{5}$이다.

제시문 [라]는 사회 불평등은 사람들에게 성취동기를 부여하고 자신의 능력을 최대한 발휘하게 하여 사회 발전에 기여한다고 주장한다. 그러나 사회평등지수와 사회발전지수의 관계를 나타내는 함수는 사회가 더 평등할수록 더 높은 수준의 사회발전이 달성될 수 있음을 보여주는 것으로, 이를 토대로 제시문 [라]의 주장이 타당하지 않음을 지적할 수 있다.

II. 연습문제 풀이

3 연습문제3 경희대 사회(2) - 선생님 예시답안

(1) <자료1>은 소득 불평등과 세대 간 계층 이동이 음의 상관관계가 있다는 점을 보여준다. 한편 <자료2>는 사회가 통합될수록 개인의 노동생산성이 높아져 1인당 국내총생산에 기여하는 점을 보여준다. 두 자료는 모두 소득 불평등, 사회 통합과 같은 사회적 요인이 계층 이동과 노동 생산성과 같은 개인적 요인에 미치는 영향을 보여주고 있다고 통합적으로 해석할 수 있다.

[논제 1]에서는 사회 거시적 측면에서 기능론과 갈등론적 관점이 소개되고 있다. 먼저 <자료2>는 기능론적 관점을 지지하는 근거가 될 수 있다. 사회가 통합될수록 개인의 기능이 높아진다는 <자료2>의 시사점은 기능론적 관점과 일치한다. 반면 <자료1>은 갈등론적 관점을 지지하는 근거가 될 수 있다. 소득불평등이라는 사회 문제가 세대 간 계층 이동 가능성 감소라는 개인의 갈등을 유발할 수 있다는 <자료1>의 시사점은 갈등론적 관점과 일치한다.

(2)

1. 인수분해를 통해 해를 찾을 수 있으므로 조건 1과 2를 활용해 두 등식을 연립방정식으로 정리하면 다음과 같다.

$-2a+b=2 \Leftrightarrow b=2a+2$

$a^2+b^2=8 \Leftrightarrow a^2+b^2-8=0$

$\Rightarrow a^2+(2a+2)^2-8=0 \Leftrightarrow 5a^2+8a-4=0 \Leftrightarrow (a+2)(5a-2)=0$

즉, $a=-2\ or\ \frac{2}{5}$

2. 미지수인 a의 수를 밝히면 b가 정해지므로, a의 범위를 알기 위해 조건 3과 4를 활용하면 다음과 같다.

조건 3에 의해, $(0\le x\le 1)$일 때, y의 범위는 $(b\le y\le b+a)$이다.

1을 참고하여 y의 범위에서 b를 a에 대한 식으로 치환하면 y의 범위는 $(2a+2\le y\le 3a+2)$로 정리할 수 있다.

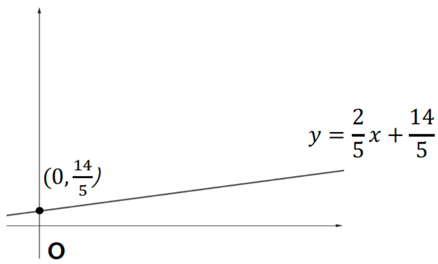
여기서 조건 4에 의해, $(0\le x\le 1)$일 때 y는 양의 값을 가지므로, $0<2a+2$ 를 확인할 수 있다.

이를 통해 a의 범위를 다음과 같이 구할 수 있다.

$-1<a$

즉, $a=\frac{2}{5}$ 이므로 $b=\frac{14}{5}$ 이다.

이를 좌표평면에 그래프로 나타내면 다음과 같다.



이상의 그림은 '사회가 평등할수록 사회가 발전한다는 점을 시사한다. 이러한 관점에서 (라)는 사회평등과 사회발전 간의 관계를 잘못 판단했다는 점에서 부정적으로 평가할 수 있다. (라)는 사회 불평등이 사람들의 성취 동기를 자극해 궁극적으로 사회 발전에 기여한다고 보지만, 실제 사회평등지수와 사회발전지수 간의 관계를 보면 (라)의 주장과 정면으로 배치된다. 사회적 경쟁이 아닌 협동과 협업이 사회 발전의 긴요한 동인이 될 수 있는 것이다.

II. 연습문제 풀이

4 연습문제4 중앙대 상경(1)

[문제 3] 올해 계약자 그룹의 재분류 후 저위험군, 중위험군, 고위험군 그룹에 속한 계약자 수가 각각 200명, 300명, 100명이라고 하자. 보험회사가 내년에 계약자들로부터 받을 연 보험료 총액의 기댓값을 구하시오. 단, 보험 계약자의 추가 및 해약은 없다고 가정한다. [20점, 원고지 작성법을 준수할 필요 없음]

❑ **다음 상황에 기초하여 문제에 답하시오.**

어느 자동차 보험회사에서는 보험 계약자를 세 그룹으로 분류하고 그룹 이름을 각각 저위험군, 중위험군, 고위험군으로 명명하였다. 이 보험회사는 직전 1년 동안 발생한 계약자의 사고 횟수에 따라 계약자가 속하는 그룹을 해마다 1월 1일에 재분류한다. 다음의 표는 올해 1년 동안 발생한 사고 횟수 X에 따라 각 그룹에 속했던 계약자들이 내년에 어느 그룹에 속하게 될지를 나타낸 것이다. 예를 들어, 올해 저위험군에 속한 계약자의 사고 횟수가 한 번일 때 내년에 중위험군으로 재분류된다.

		사고 횟수 X에 따라 재분류될 내년의 계약자 그룹			
		$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X\geq 3$
올해의 계약자 그룹	저위험군	저위험군	중위험군	중위험군	고위험군
	중위험군	저위험군	중위험군	고위험군	고위험군
	고위험군	중위험군	고위험군	고위험군	고위험군

사고 횟수 X는 계약자 그룹에 상관없이 다음과 같은 확률분포를 따른다고 한다.

X	0	1	2	3	4 이상	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2	1

저위험군, 중위험군, 고위험군 그룹에 속한 계약자에 대한 연 보험료는 각각 40만 원, 50만 원, 60만 원이다.

II. 연습문제 풀이

4 연습문제4 중앙대 상경(1) 예시답안

주어진 문제에서 제시한 보험회사가 받을 연 보험료 총액은 다음과 같이 정의된다.

∴연 보험료 총액=연보험료×연보험가입자수

따라서 연 보험료 총액의 기댓값[E(X)]은 곧 우변의 기댓값을 구하면 되므로

∴연 보험료 총액의 기댓값=연보험료의 기댓값[E(X)]×연보험가입자수의 기댓값[E(X)]

연보험가입자수의 기댓값을 구하기 위해서는 먼저 올해 계약자 그룹이 내년에 속하게 될 그룹에 대한 확률을 주어진 사고 횟수 X에 관한 확률분포표를 바탕으로 계산하면 다음과 같다.

그룹 재분류 결과에 대한 확률		내년에 속하게 될 그룹		
		저위험군	중위험군	고위험군
올해 그룹	저위험군	0.1	0.2+0.3=0.5	0.2+0.2=0.4
	중위험군	0.1	0.2	여집합의 확률 1-(0.1+0.2)=0.7
	고위험군	0	0.1	여집합의 확률 1-(0.1)=0.9

이때, 올해 고위험군이 내년 저위험군에 속하는 경우는 주어진 문제에서 제시되고 있지 않으므로 확률은 0에 해당한다.

올해 그룹의 위험군별 계약자 수는 저위험군(200명), 중위험군(300명), 고위험군(100명)이므로 올해 그룹의 계약자수를 그룹 재분류 결과에 대한 확률에 곱하면 연보험가입자수의 기댓값[E(X)]을 다음과 같이 구할 수 있다.

연보험가입자수의 기댓값		내년에 속하게 될 그룹		
		저위험군	중위험군	고위험군
올해 그룹	저위험군	0.1×200=20	0.5×200=100	0.4×200=80
	중위험군	0.1×300=30	0.2×300=60	0.7×300=210
	고위험군	0×100=0	0.1×100=10	0.9×100=90
그룹별 연보험가입자수의 기댓값		50	170	380

이때 연보험료의 기댓값은 저위험군(40만원), 중위험군(50만원), 고위험군(60만원)으로 문제에서 주어져 있으므로, 연보험료 총액의 기댓값은

저위험군=50(명)×40(만원)=2,000만원

중위험군=170(명)×50(만원)=8,500만원

고위험군=380(명)×60(만원)=22,800만원

따라서, 내년의 연 보험료 총액의 기댓값은 세 그룹의 총합(2000+8500+22800)인 33,300만원이다.

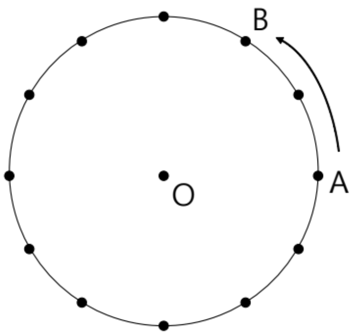
II. 연습문제 풀이

5 연습문제5 중앙대 상경(2)

[문제 3] 한 참가자가 이 게임에 참여하여 얻을 수 있는 최종 점수의 기댓값을 구하시오. [20점, 원고지 작성법을 준수할 필요 없음]

주머니에서 공을 꺼내서 말을 옮기는 게임을 고려하자.

- 주머니에는 숫자 1이 적혀 있는 공 1개, 숫자 2가 적혀 있는 공 2개, 숫자 6이 적혀 있는 공 1개가 들어 있다.
- 아래 그림과 같이 반지름이 1인 원의 둘레를 12등분하는 12개의 점으로 구성된 게임판이 있다. 게임의 첫 출발점은 A이다.



- 게임의 규칙은 다음과 같다.

1. 주머니에서 임의로 하나의 공을 뽑은 후 공에 적혀 있는 숫자만큼 시계 반대 방향으로 말을 옮긴다. 예를 들어, 2가 적혀 있는 공을 뽑으면 말을 점 A에서 점 B로 옮긴다. (단, 한 번 뽑은 공은 주머니에 다시 넣지 않는다.)
2. 이때 얻을 수 있는 점수는 출발점, 도착점 그리고 원의 중심 O를 연결하여 만들어지는 삼각형의 넓이와 같다. (단, 세 점이 한 직선상에 있는 경우에 얻을 수 있는 점수는 원의 넓이와 같다.)

- 참가자는 위의 시행을 연속하여 2회 진행한다. 두 번째 시행은 첫 번째 시행 후 주머니에 남아 있는 공을 사용하며, 두 번째 시행의 출발점은 첫 번째 시행의 도착점이다.
- 게임의 최종 점수는 각 시행에서 얻은 점수의 합이다.

5 연습문제5 중앙대 상경(2) 예시답안

주어진 게임 규칙에 따른 최종 점수의 기댓값을 구하기 위해 먼저 최종 점수가 나타날 수 있는 모든 경우의 수를 나열하면 다음과 같다.

공에 적힌 숫자 (첫 번째 시행)	공에 적힌 숫자 (두 번째 시행)
1	2
1	6
2	1
2	2
2	6
6	1
6	2

규칙에 따르면 최종 점수는 각 시행에서 얻은 점수의 합으로 정의된다. 따라서 두 번의 시행 동안 말이 이동한 거리가 같다면 시행 순서와 상관없이 동일한 최종 점수를 획득하게 된다. 이를 모든 경우의 발생 확률과 함께 표로 정리하면 다음과 같다.

말의 이동 거리 (첫 번째 시행 + 두 번째 시행)	공에 적힌 숫자 (첫 번째 시행)	공에 적힌 숫자 (두 번째 시행)	발생 확률
3	1	2	$\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$
3	2	1	$\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$
4	2	2	$\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$
7	1	6	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$
7	6	1	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$
8	2	6	$\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$
8	6	2	$\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$

이때, 모든 시행에서 얻을 수 있는 삼각형은 두 변의 길이가 원의 반지름인 1이므로, 삼각형의 넓이는 다음의 세 가지 경우로 정리할 수 있다.

1. 이등변 삼각형(말이 1만큼 이동) → $\frac{1}{2}\times 1\times 1\times \sin 30° = \frac{1}{4}$

2. 정삼각형(말이 2만큼 이동) → $\frac{1}{2}\times 1\times 1\times sin\,60° = \frac{\sqrt{3}}{4}$

3. 주어진 원의 넓이인 π (말이 6만큼 이동해서 세 점이 한 직선상에 있는 경우)= $\pi\times 1^2 = \pi$

이를 위의 표와 함께 정리하면 다음과 같다.

말의 이동 거리 (첫 번째 시행 + 두 번째 시행)	공에 적힌 숫자 (첫 번째 시행)	공에 적힌 숫자 (두 번째 시행)	발생 확률	최종 점수
3	1	2	$\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1+\sqrt{3}}{4}$
	2	1	$\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1+\sqrt{3}}{4}$
4	2	2	$\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
7	1	6	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}+\pi$
	6	1	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}+\pi$
8	2	6	$\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}+\pi$
	6	2	$\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}+\pi$

따라서 이 게임에 참여하여 얻을 수 있는 최종 점수의 기댓값(발생 확률×최종점수)은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$E(X) = 2\times\frac{1+\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{6}+2\times\left(\frac{1}{4}+\pi\right)\times\frac{1}{12}+2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\pi\right)\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{2}$$

6 연습문제6 중앙대 상경(3)

[문제 3] 과학수사대에서 심장 박동수 대신 혈압을 이용하는 새로운 거짓말 탐지기 B를 만들었다. 거짓말 탐지기 B는 용의자가 거짓말을 했을 때 거짓이라고 판정할 확률과 참말을 했을 때 참이라고 판정할 확률이 같도록 설계되었다. 과학수사대가 실시한 실험에 의하면 거짓말 탐지기 B의 성능이 거짓말 탐지기 A에 비하여 20% 향상되었다고 한다. 그렇다면, 용의자가 거짓말을 했을 때 거짓말 탐지기 B가 거짓이라고 판정할 확률을 구하시오. 단, 필요한 경우 오른쪽 표준정규분포표를 이용하시오.
[20점, 원고지 작성법을 준수할 필요 없음]

표준정규분포표

z	$P(0 \leq Z \leq z$
0.5	0.19
1	0.34
1.5	0.43
2	0.48

II. 연습문제 풀이

6 연습문제6 중앙대 상경(3) 예시답안

거짓말을 한 사건 : F , 참말을 한 사건 : T , A가 거짓이라 판정 : A , B가 거짓이라 판정 : B

① $P(A|F) = P(X \geq 100)$ as X : 거짓말 하는 사람의 심장 박동수 $\sim N(120, 20^2)$

$= P\left(Z \geq \frac{100-120}{20}\right)$ ↳ $\frac{X-120}{20} = Z \sim N(0,1)$

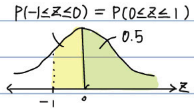
$= P(Z \geq -1)$

$P(-1 \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq 1)$

$= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 1)$

$= 0.5 + 0.34$

$= 0.84$



② $P(A|T) = P(Y \geq 100)$ as Y : 참말하는 사람의 심장 박동수 $\sim N(90, 10^2)$

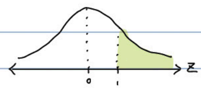
$= P\left(Z \geq \frac{100-90}{10}\right)$ ↳ $\frac{Y-90}{10} = Z \sim N(0,1)$

$= P(Z \geq 1)$

$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1)$

$= 0.5 - 0.34$

$= 0.16$



③ $P(F|A) = \frac{P(F \cap A) \cdots (a)}{P(A) \cdots (b)}$

(a) $P(F \cap A) = P(F)\,P(A|F) = \frac{4}{10} \times \frac{84}{100}$

(b) $P(A) = P(A \cap F) + P(A \cap T)$

$= P(F)\,P(A|F) + P(T)\,P(A|T)$

$= \frac{4}{10} \times \frac{84}{100} + \frac{6}{10} \times \frac{16}{100}$

$P(F|A) = \frac{4 \times 84}{4 \times 84 + 6 \times 16} = \frac{7}{9}$; 거짓말 탐지기 A의 성능

④ $P(F|B) = \frac{120}{100} \times P(F|A) = \frac{\cancel{6}^{\,2}}{5} \times \frac{7}{\cancel{9}_{\,3}} = \frac{14}{15}$: A대비 성능 20% 증가

⑤ $P(B|F) = p$ (구하고자 하는 바)

이때, B는 '거짓말을 했을 때 거짓이라 판단' 확률과 '참말했을때 참이라 판단' 확률이 같으므로

$P(B|T) = 1-p$

실제 \ 판단	T	F
T	p	1-p
F	1-p	p

∵ 확률은 언제나 도합 1 이어야.

∴ $P(F|B) = \frac{P(F \cap B) \cdots (a)}{P(B) \cdots (b)}$

(a) $P(F \cap B) = P(F)\,P(B|F) = \frac{4}{10} \times p$

(b) $P(B) = P(B \cap F) + P(B \cap T)$

$= P(F)\,P(B|F) + P(T)\,P(B|T)$

$= \frac{4}{10}p + \frac{6}{10}(1-p) = \frac{6}{10} - \frac{2}{10}p$

$= \frac{4p}{6-2p} = \frac{14}{15}$ ∴ $p = \frac{21}{22}$

A) $\frac{21}{22}$

II. 연습문제 풀이

7 연습문제7 중앙대 상경(4)

[문제 3] 한 참가자가 이 게임에 참여하여 얻을 수 있는 최종 점수의 기댓값을 구하시오. [20점, 원고지 작성법을 준수할 필요 없음]

한 단체에서 웃음과 행복에 대한 강연을 한 후, 참가자에게 다음과 같은 게임을 실시하여 상금을 지급하고자 한다. 게임의 규칙은 다음과 같다.

- 1부터 4까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 4개의 공이 들어있는 주머니가 있고, 한 번 시행에서 한 개의 공을 꺼낸다. 시행은 두 번까지 할 수 있다.
- 첫 번째 시행에서 선택된 공에 적힌 수를 a라 하면, a^2만 원의 상금이 적립된다. 꺼낸 공을 주머니에 다시 넣고, 꺼낸 공과 같은 숫자가 적힌 새로운 공 하나를 주머니에 추가로 넣어준다.
- 두 번째 시행 여부는 참가자가 선택한다. 두 번째 시행을 하지 않는 경우 게임은 종료되며, 첫 번째 시행에서 적립된 상금만 지급된다.
- 두 번째 시행을 하는 경우, 두 번째 시행에서 선택된 공에 적힌 수를 b라 하자. 이때, $b \leq a$인 경우에는 b^2만 원의 상금이 추가로 적립되어, 첫 번째 시행에서 적립된 상금과 함께 최종 지급된다. 하지만, $b > a$인 경우에는 상금이 추가로 적립되지 않으며, 첫 번째 시행에서 적립된 상금도 지급되지 않는다.

7 연습문제7 중앙대 상경(4) 예시답안

① 1번째 시행만

$\frac{1}{4}(1^2+2^2+3^2+4^2) = 7.5$

② 2번째 시행까지

첫번째 시행 때 수를 a, 두번째 시행 때 수를 b라 할때,

(a) $a=4 \rightarrow$ 바구니 공 $= \{1, 2, 3, 4, 4\}$

$$\left.\begin{aligned} b=4 &: \tfrac{1}{4}\times\tfrac{2}{5}\times(4^2+4^2) = \tfrac{64}{20} \\ b=3 &: \tfrac{1}{4}\times\tfrac{1}{5}\times(4^2+3^2) = \tfrac{25}{20} \\ b=2 &: \tfrac{1}{4}\times\tfrac{1}{5}\times(4^2+2^2) = \tfrac{20}{20} \\ b=1 &: \tfrac{1}{4}\times\tfrac{1}{5}\times(4^2+1^2) = \tfrac{17}{20} \end{aligned}\right\} \frac{126}{20}$$

(c) $a=2 \rightarrow$ 바구니 공 $= \{1, 2, 2, 3, 4\}$

$$\left.\begin{aligned} b=2 &: \tfrac{1}{4}\times\tfrac{2}{5}\times(2^2+2^2) = \tfrac{16}{20} \\ b=1 &: \tfrac{1}{4}\times\tfrac{1}{5}\times(2^2+1^2) = \tfrac{5}{20} \end{aligned}\right\} \frac{21}{20}$$

(b) $a=3 \rightarrow$ 바구니 공 $= \{1, 2, 3, 3, 4\}$

$$\left.\begin{aligned} b=3 &: \tfrac{1}{4}\times\tfrac{2}{5}\times(3^2+3^2) = \tfrac{36}{20} \\ b=2 &: \tfrac{1}{4}\times\tfrac{1}{5}\times(3^2+2^2) = \tfrac{13}{20} \\ b=1 &: \tfrac{1}{4}\times\tfrac{1}{5}\times(3^2+1^2) = \tfrac{10}{20} \end{aligned}\right\} \frac{59}{20}$$

(d) $a=1 \rightarrow$ 바구니 공 $= \{1, 1, 2, 3, 4\}$

$b=1 \rightarrow \frac{1}{4}\times\frac{2}{5}\times(1^2+1^2) = \frac{4}{20}$

$\therefore \frac{126}{20}+\frac{59}{20}+\frac{21}{20}+\frac{4}{20} = \frac{210}{20} = 10.5$

A) 7.5만원, 10.5만원

8 연습문제8 중앙대 상경(5)

[문제 3] 한 참가자가 이 게임에 참여하여 받을 수 있는 선물 개수의 기댓값을 구하시오. [20점, 원고지 작성법을 준수할 필요 없음]

아래와 같은 게임을 통해서 선물을 주려고 한다.

- 빨간 공 2개와 파란 공 2개가 들어 있는 하나의 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸다. 이때, 서로 같은 색의 공이 나오면 꺼낸 2개의 공 중에서 1개를 버리고, 나머지 1개는 주머니에 다시 넣는다. 서로 다른 색의 공이 나오면 꺼낸 2개의 공을 모두 주머니에 다시 넣는다.
- 주머니에 남아 있는 공을 가지고 위의 절차를 한 번 더 반복한 후 게임을 종료한다.
- 게임이 종료된 후 주머니에 들어 있는 빨간 공과 파란 공의 개수가 서로 같으면, 주머니에 들어 있는 공의 개수만큼 선물을 준다. 빨간 공과 파란 공의 개수가 서로 다르면, 빨간 공과 파란 공의 개수의 차이만큼 선물을 준다.

8 연습문제8 중앙대 상경(5) 예시답안

1번째 시행에서 꺼낸 공 : X_1 , 2번째 시행에서 꺼낸 공 : X_2라 하자.

최초 주머니	X_1	이후 주머니	X_2	최종주머니	선물개수 (Y)
{RRBB}	{RR} $\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$	{RBB}	{BB} $\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}=\frac{1}{3}$	{RB}	2개
			{RB} $\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_3C_2}=\frac{2}{3}$	{RBB}	1개
	{BB} $\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$	{RRB}	{RR} $\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}=\frac{1}{3}$	{RB}	2개
			{RB} $\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_3C_2}=\frac{2}{3}$	{RRB}	1개
	{RB} $\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\frac{2}{3}$	{RRBB}	{RR} $\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$	{RBB}	1개
			{BB} $\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$	{RRB}	1개
			{RB} $\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\frac{2}{3}$	{RRBB}	4개

선물개수 (Y)	1	2	4
P	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times4$ $=\frac{4}{9}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times2$ $=\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$ $=\frac{4}{9}$

∵ 1번째 시행과 2번째 시행은 서로 독립

$$E(Y)=1\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\frac{1}{9}+4\cdot\frac{4}{9}=\frac{1}{9}(4+2+16)=\frac{22}{9}$$

A) $\frac{22}{9}$개 (2.45개)

II. 연습문제 풀이

9 연습문제9 한양대 상경(1)

1. 주머니 A에는 숫자 1, 1, 2, 3, 4, 5, 5가 하나씩 적혀 있는 7개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 −1, −1, 0, 1, 2, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 7개의 공이 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 공을 한 개씩 꺼내어 공에 적힌 수를 확인하고 다시 주머니 A에 넣는 시행을 4번 반복하고, 주머니 B에서 임의로 공을 한 개씩 꺼내어 공에 적힌 수를 확인하고 다시 주머니 B에 넣는 시행을 4번 반복할 때, 주머니 A와 B에서 꺼낸 공 8개에 적혀 있는 수의 평균을 W라 하자. 확률변수 W의 평균 $\mathrm{E}(W)$와 분산 $\mathrm{V}(W)$의 값을 구하고, $\mathrm{E}\left(\frac{5}{2}W-1\right) < n < \frac{2521}{\mathrm{V}(-28W+10)}$을 만족시키는 짝수인 자연수 n의 개수를 구하시오.

2. 한 바둑기사가 인공지능 바둑 프로그램과 연속으로 5차례 대국을 한다. 바둑기사가 k번째 대국에서 이길 확률은 $\frac{1}{k}$이고, 연속되는 두 대국에서 연달아 이길 때마다 상금으로 720만 원을 받는다. 예를 들어 바둑기사가 1, 2, 3번째 대국에서만 이겼다면 총 상금은 1440만 원이다. 바둑기사가 받을 수 있는 총 상금의 기댓값을 구하시오. (단, 각각의 대국에서 바둑기사가 이기는 사건은 서로 독립이다.)

3. $n \geq 3$인 자연수 n에 대하여, 세 변의 길이가 각각 $n-1$, n, $n+1$인 삼각형의 외접원의 넓이를 S_n이라 할 때, S_n을 n에 대한 식으로 나타내고 이를 이용하여 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$을 구하시오.

II. 연습문제 풀이

9 연습문제9 한양대 상경(1) 예시답안

< 한양대 Q1 >

A : 1, 1, 2, 3, 4, 5, 5

B : −1, −1, 0, 1, 2, 3, 3

B에 적힌 공의 숫자 = A에 적힌 공의 숫자 − 2

⇒ '주머니 B에서 임의로 뽑힌 숫자'와 '주머니 A에서 임의로 뽑힌 숫자'는 동일한 확률분포를 따른다

따라서, 해당 문제를 '주머니 A에서 임의의 숫자를 8회 뽑은 것'과 동일하게 볼 수 있는데,

이때 8개의 숫자의 평균인 W는 아래와 같이 정의된다. (각 회당 뽑힌 숫자 = Z_i, $i = 1, 2, \cdots 8$)

$$W = \{(Z_1+Z_2+Z_3+Z_4) + ((Z_5-2)+(Z_6-2)+(Z_7-2)+(Z_8-2))\}/8$$

$$= \sum_{i=1}^{8} Z_i / 8 - 1$$

Z	1	2	3	4	5
$P(Z_i = Z)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$

$$E(Z) = \frac{1}{7}(1\times2+2\times1+3\times1+4\times1+5\times2) = \frac{21}{7} = 3$$

$$E(Z^2) = \frac{1}{7}(1^2\times2+2^2\times1+3^2\times1+4^2\times1+5^2\times2) = \frac{81}{7}$$

$$Var(Z) = E(Z_i^2) - \{E(Z)\}^2 = \frac{81}{7} - 3^2 = \frac{18}{7}$$

① $E(W) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{8} Z_i}{8} - 1\right) = \frac{1}{8}E\left(\sum_{i=1}^{8} Z_i\right) - 1$

이때, Z_i는 독립적으로 추출된 값이므로, (i.i.d.)

$= \frac{1}{\cancel{8}} \cdot \cancel{8}E(Z) - 1 = 3 - 1 = 2$

② $Var(W) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{8} Z_i}{8} - 1\right) = \frac{1}{64}Var\left(\sum_{i=1}^{8} Z_i\right)$

이때, Z_i는 독립적으로 추출된 값이므로, (i.i.d.)

$= \frac{1}{64} \cdot 8\,Var(Z) = \frac{1}{\cancel{8}_4} \cdot \frac{\cancel{18}^{9}}{7} = \frac{9}{28}$

$$E\left(\frac{5}{2}W - 1\right) = \frac{5}{2}E(W) - 1 = \frac{5}{2}\cdot 2 - 1 = 4$$

$$Var(-28W+10) = 28^2 \cdot Var(W) = 252$$

$\therefore\ E\left(\frac{5}{2}W-1\right) < n < \frac{2521}{V(-28W+10)} \Leftrightarrow 4 < n < \frac{2521}{252} = 10.004$ $\quad n = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ 중 짝수는 6, 8, 10 총 3개

A) $E(W) = 2$, $Var(W) = \frac{9}{28}$, 3개

II. 연습문제 풀이

9 연습문제9 한양대 상경(1) 예시답안

〈한양대 Q2〉

k번째 대국에서 이길 확률은 k이므로, 1번째 대국에서 이길 확률은 1이다. 따라서 2~5번째 대국만 고려하여 경우의 수는 $2^4 = 16$가지이다.

이길때를 T, 질때를 F, 대국에서 승리하는 횟수를 N이라 하자.

① $N=4$

(T,T,T,T,T) : $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5} = \frac{1}{120}$

② $N=3$

(T,T,T,T,F) : $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{5} = \frac{4}{120}$

③ $N=2$

(T,T,T,F,T) : $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5} = \frac{3}{120}$

(T,T,T,F,F) : $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5} = \frac{12}{120}$

(T,T,F,T,T) : $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5} = \frac{2}{120}$

(T,F,T,T,T) : $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5} = \frac{1}{120}$

도합 $\frac{18}{120}$

④ $N=1$

(T,T,F,T,F) = $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{5} = \frac{8}{120}$

(T,T,F,F,T) = $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5} = \frac{6}{120}$

(T,T,F,F,F) = $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5} = \frac{24}{120}$

(T,F,T,T,F) = $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{5} = \frac{4}{120}$

(T,F,F,T,T) = $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5} = \frac{2}{120}$

도합 $\frac{44}{120}$

⑤ $N=0$

(T,F,T,F,T) = $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5} = \frac{3}{120}$

(T,F,T,F,F) = $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5} = \frac{12}{120}$

(T,F,F,T,F) = $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{5} = \frac{8}{120}$

(T,F,F,F,T) = $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5} = \frac{6}{120}$

(T,F,F,F,F) = $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5} = \frac{24}{120}$

도합 $\frac{53}{120}$

$$E(N) = 4\times\frac{1}{120} + 3\times\frac{4}{120} + 2\times\frac{18}{120} + 1\times\frac{44}{120} + 0\times\frac{53}{120} = \frac{96}{120} = \frac{4}{5}$$

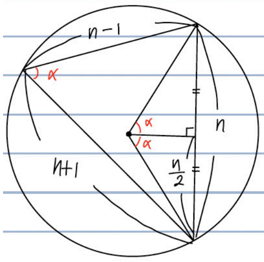
∴ 상금의 기댓값 = 상금 크기 × 상금 받을 확률 = $720\times\frac{4}{5} = 576$

A) 576만원

II. 연습문제 풀이

9 연습문제9 한양대 상경(1) 예시답안

<한양대 Q3>



'코사인 법칙'에 의해

$$n^2 = (n+1)^2 + (n-1)^2 - 2(n+1)(n-1)\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{n^2+2}{2(n+1)(n-1)}$$

반지름을 r이라 할 때,

$$r \cdot \sin\alpha = \frac{n}{2}$$

$$r^2 = \frac{n^2}{4} \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{n^2}{4} \cdot \frac{1}{1-\cos^2\alpha} \leftarrow 1-\cos^2\alpha = 1 - \frac{(n^2+2)^2}{(2n^2-2)^2} = \frac{3n^4-12n^2}{(2n^2-2)^2} = \frac{3n^2(n^2-4)}{4(n+1)^2(n-1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}(n+1)^2(n-1)^2}{3\cancel{n^2}(n^2-4)}$$

$$= \frac{(n^2-1)^2}{3(n^2-4)}$$

$\therefore$ 원의 넓이 $S_n = r^2\pi = \dfrac{(n^2-1)^2}{3(n^2-4)}\pi$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^2} = \frac{(n^2-1)^2\pi}{3n^2(n^2-4)} = \frac{\pi}{3}$$

A) $\frac{\pi}{3}$