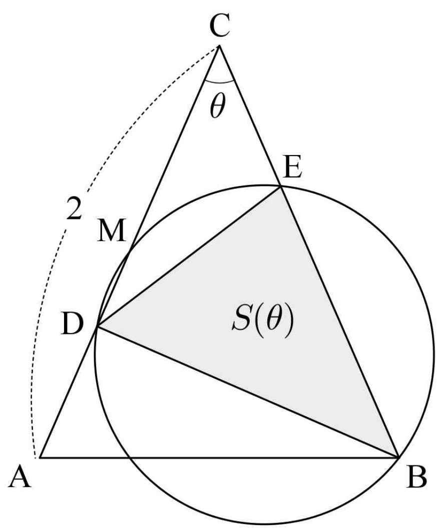
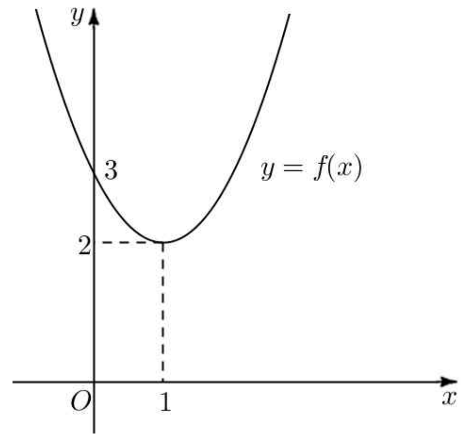
제 2 교시

# 수학 영역(B 형)

**1.** 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}=2$ 이고 $\angle \mathrm{ACB}=\theta$ 인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점 M에 대하여 선분 BM을 지름으로 하는 원이 선분 AC와 만나는 점을 D, 선분 BC와 만나서 생기는 점을 E라고 하자. 삼각형 BDE의 넓이를 $S(\theta)$라고 할 때, $\lim_{\theta \to +0} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [1][4점]



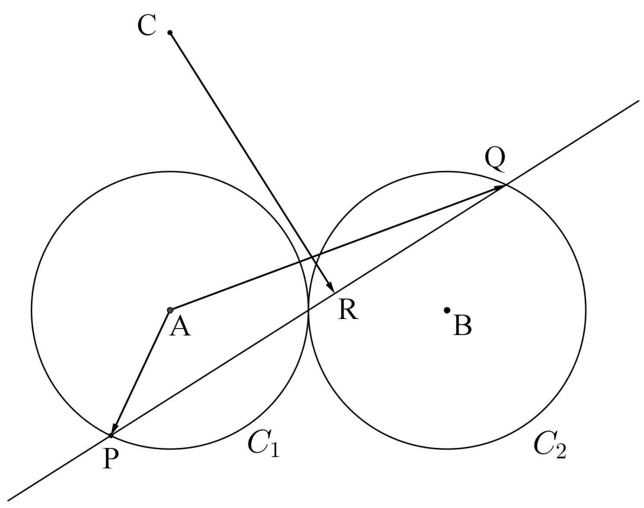

**2.** 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



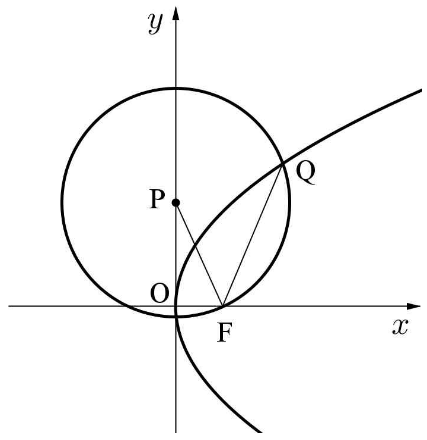

실수 $t$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식이 $y=g(x)$ 일 때, $x$에 대한 방정식 $\frac{f(x)-f(t)}{g(x)}=0$ 의 서로 다른 근의 개수가 하나가 되도록 하는 $t$값의 합을 구하여라.[2][3점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

**3.** 그림과 같이 평면 위에 반지름의 길이가 2인 두 개의 원 $C_1, C_2$가 서로 외접하고 있고 두 원 밖의 한 점 C에 대하여 $\mathrm{AB} \perp \mathrm{AC}$, $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}}$이다. 원 $C_1$ 위의 움직이는 점 P에 대하여 점 P를 선분 AB의 중점에 대칭시킨 점을 Q라고 하자. 점 C에서 직선 PQ에 내린 수선의 발을 R이라고 할 때, $\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}} + \overrightarrow{\mathrm{CR}}\right|$의 최댓값은 $\sqrt{p} + \sqrt{q}$이다. $p+q$의 값을 구하여라. (단, $p$, $q$는 자연수이다.) 3)[4점]

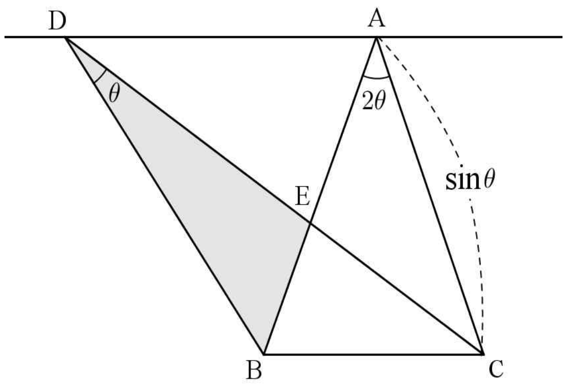



**4.** $y$축 양의 방향 위의 움직이는 점 P를 중심으로 하고 포물선 $y^2 = 4px$ 의 초점 F를 지나는 원과 포물선이 만나는 점 중에서 1사분면 위의 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{FQ}} - \overline{\mathrm{FP}}$ 의 최댓값이 2 일 때, $p$ 의 값은? 4)[4점]

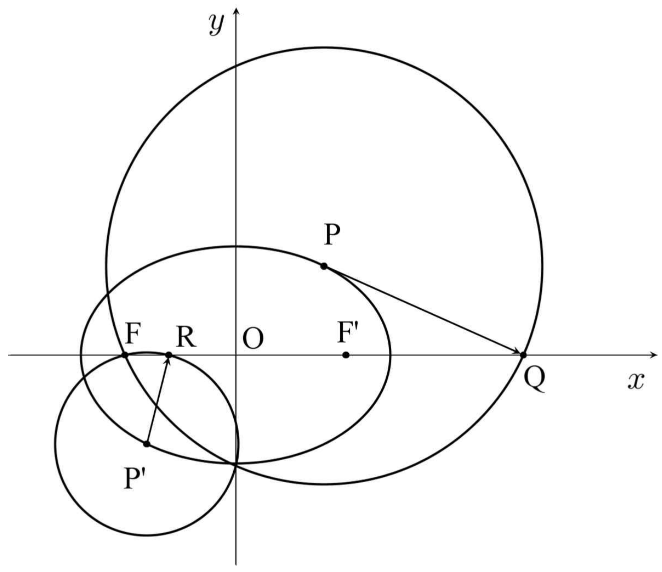



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

**5.** 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=\sin\theta$, $\angle BAC=2\theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 점 A를 지나고 선분 BC에 평행한 직선 위에 점 D를 $\angle BDC=\theta$가 되도록 잡고 선분 AB와 선분 DC의 교점을 E라고 하자. 삼각형 DBE의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) 5)
[4점]




**6.** 타원 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 이 타원 위의 한 점 $P(p,\ q)$에 대하여 점 P를 원점에 대칭시킨 점을 P′라 하자. 점 P를 중심으로 하고 점 F를 지나는 원이 $x$축과 만나는 점 중 F가 아닌 점을 Q, 점 P′을 중심으로 하고 점 F를 지나는 원이 $x$축과 만나는 점 중 F가 아닌 점을 Q′이라 하자. $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{P'R}=0$일 때, 삼각형 PFF′의 넓이를 구하시오. (단, $p^2\neq 25$) 〔4점〕6)



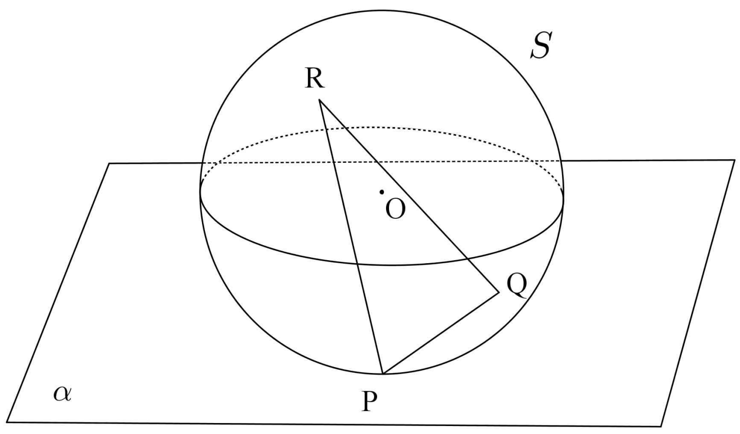
**7.** 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 구 $S$가 평면 $\alpha$와 점 P에서 접하고 있다. 구 $S$위에 다음 조건을 만족하는 두 점 Q, R을 잡는다.

(가) $\overline{\mathrm{PQ}}=2$

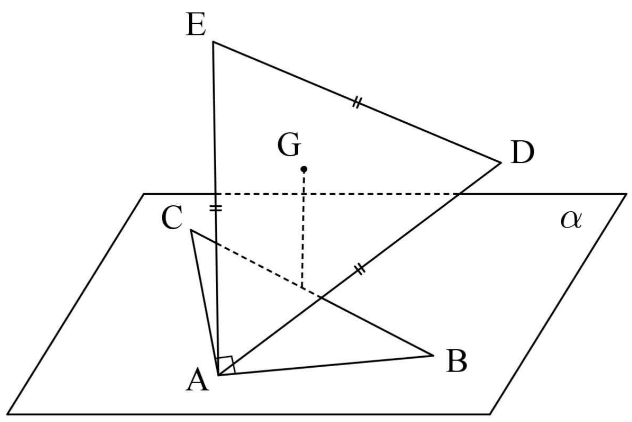
(나) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$

(다) 평면 $\alpha$와 평면 PQR이 이루는 각의 크기는 $45^\circ$이다.

선분 PQ의 중점을 M이라 할 때, 직선 OR과 직선 MR이 이루는 각의 크기를 $\theta$라 하자. $10\cos^2\theta$값을 구하여라. 7)〔4점〕

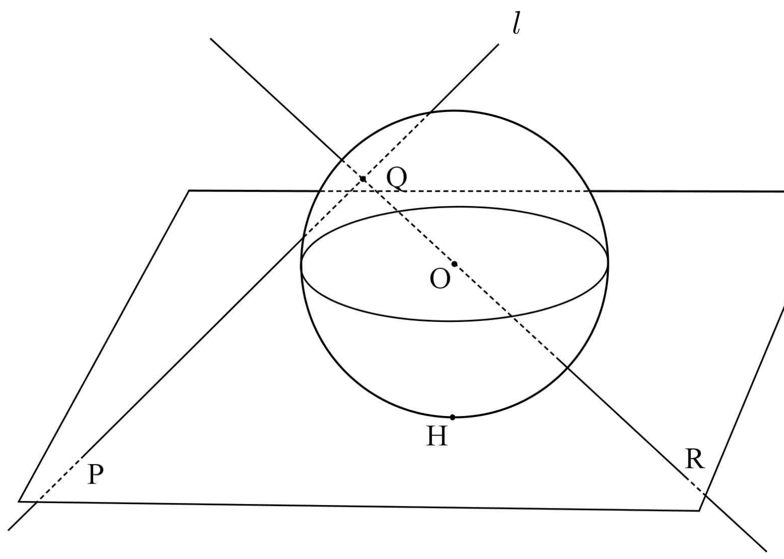



**8.** 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{6}$이고 $\angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{2}$인 직각이등변 삼각형 ABC가 평면 $\alpha$위에 놓여 있고, 점 A와 서로 다른 두 점 D, E를 세 꼭짓점으로 하는 정삼각형 ADE에 대하여, 정삼각형 ADE의 무게중심을 G, G에서 평면 $\alpha$에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{GH}}=1$이고, 점 H는 선분 BC의 중점이다. $\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EC}}$의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$이라 할 때, $M^2+m^2$의 값은? 8)[4점]

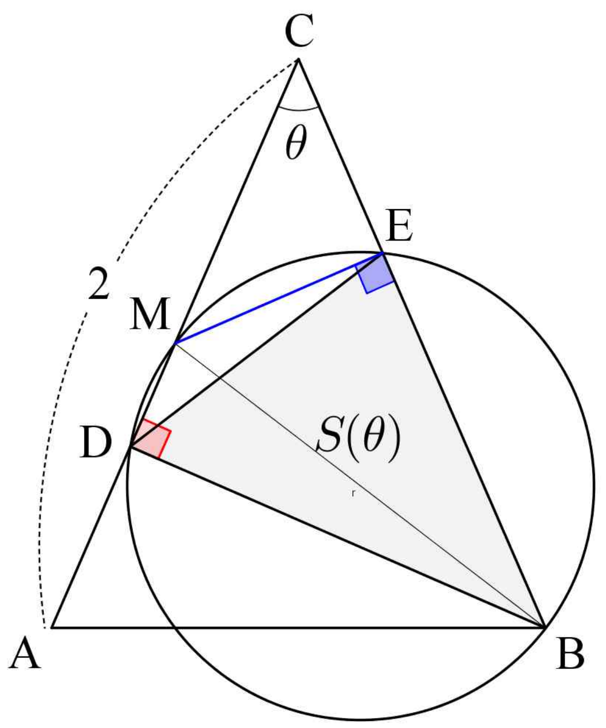



① 90 ② 96 ③ 102 ④ 108 ⑤ 114

**9.** 그림과 같이 평면 $\alpha$ 위의 점 P를 지나는 직선 $l$이 평면 위에 놓여 있는 반지름이 1인 구와 점 Q에서 접하고 있다. 직선 $l$과 평면 $\alpha$가 이루는 각은 $30°$이고 $\overline{\mathrm{PH}}=3$일 때 직선 QO가 평면 $\alpha$와 만나는 점을 R이라 하자. 삼각형 PQR을 평면 PQH에 정사영한 도형의 넓이가 $S$일 때, $44S^2$의 값을 구하여라. (단, O는 구의 중심, H는 구와 평면의 접점이다.) 9) [4점]



1)

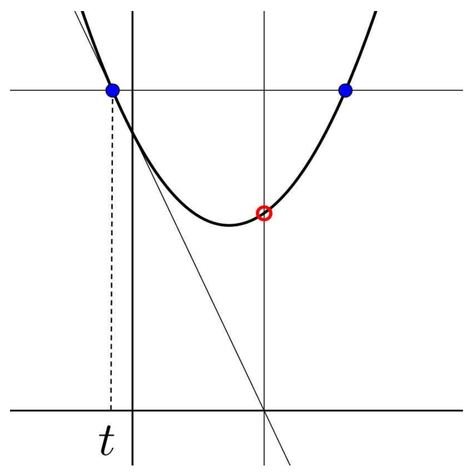



$\overline{\mathrm{MC}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{CE}}=\cos\theta$이고 $\overline{\mathrm{BE}}=2-\cos\theta$이다.
$\overline{\mathrm{AB}}=4\sin\frac{\theta}{2}$이고 $\angle\mathrm{BAD}=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$이므로
$\overline{\mathrm{BD}}=4\sin\frac{\theta}{2}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$이다.

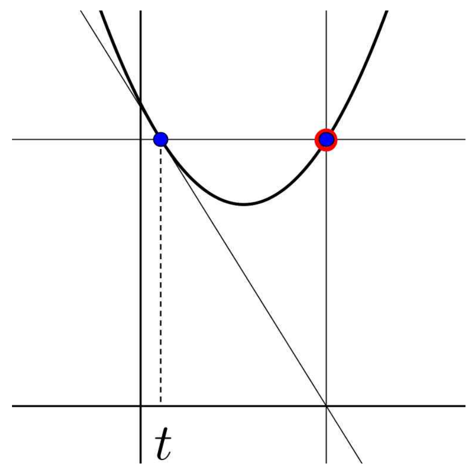
$\angle\mathrm{DBE}=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로 삼각형 DBE의 넓이 $S(\theta)$는
$S(\theta)=\frac{1}{2}\times(2-\cos\theta)\times4\sin\frac{\theta}{2}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

계산하면 극한값은 2이다.

2) $g(x)\neq0$이고 $f(x)=f(t)$가 성립해야 한다.
그래프를 통해 살펴보면 다음과 같다.




$y=f(t)$와 $y=f(x)$의 교점이 파란색점이고 $(t,f(t))$에서의 접선 $y=g(x)$가 $x$축과 만나는점은 무연근을 만들기 때문에 빨간색 원으로 표시하였다.
위 그림과 같은 상황은 서로다른 두 개의 근이 존재할 경우이며 근이 한 개 존재하기 위해서는 빨간색원과 파란색원이 만나야 된다.

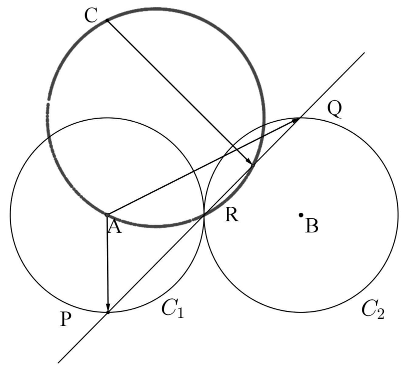



이러한 $t$값은 좌우대칭으로 존재하기 때문에 $t_1+t_2=2$다.
이 외에도 $x$축에 평행한 직선이 꼭지점을 지날 때에도 근이 하나 존재하기 때문에 모든 $t=1$도 조건을 만족시킨다. 따라서 모든 $t$값의 합은 3이다.

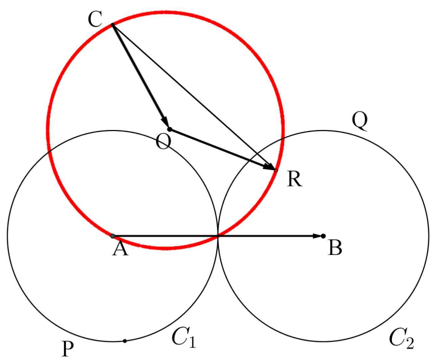
3) 34

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$인데 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$이므로 ($\because$대칭)
$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{CR}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+\overrightarrow{\mathrm{CR}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CR}}\right|$ 이다.

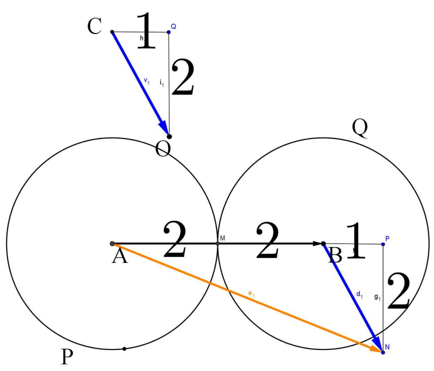
점 A,B의 중점을 M이라고 하면 점 M을 지나는 직선에 점 C에서 수선의 발을 내린 점이 점 R이 된다. 점 C와 점 M은 고정되어 있는 점이고 $\angle\mathrm{CRM}$은 직각을 유지하므로 점 R은 선분 CM을 지름으로 하는 원을 그리게 된다.



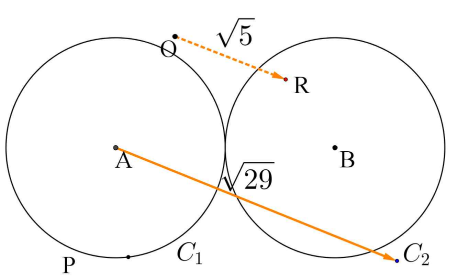

점 R이 그리는 원의 중심을 O라고 하면 $\overrightarrow{CR}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OR}$



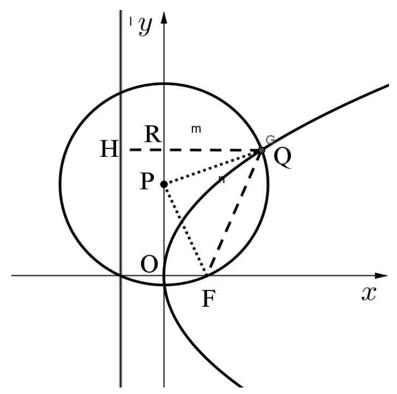

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CR}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OR}|$ 에서 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CO}$는 아래 그림에서 주황색 벡터와 같으므로 그 크기는 $\sqrt{29}$이다. 이 때 $\overrightarrow{OR}$는 점 O를 중심으로 회저하는 크기가 일정한 벡터이기 때문에 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CO}$와 평할 할 때 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{CR}|$의 값이 최대가 된다.




아래 그림과 같은 상황이며 최댓값은 $\sqrt{5}+\sqrt{29}$이다.




4) 정답 4

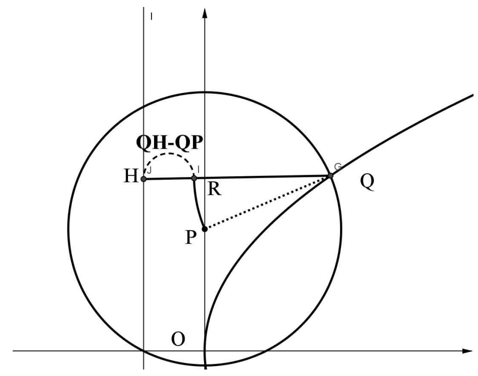



포물선위의 점 $Q$에서 준선에 내린 수선의 발을 $H$, $y$축에 내린 수선의 발을 $R$이라고 하자.

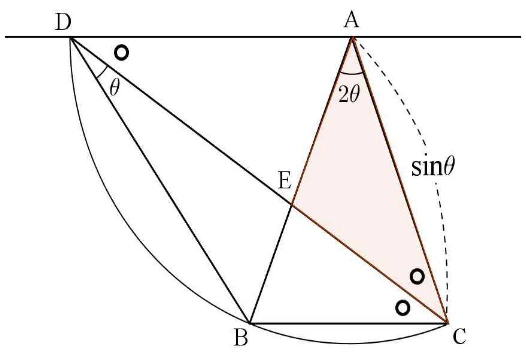
$PF=PQ$ (원의 반지름)
$FP=HQ$ (포물선 정의)

$HQ-PQ$ 의 최댓값을 구하는 것과 같다.
직각삼각형 $RPQ$ 에서 $RQ \le PQ$이다.
$RQ=HQ-p$이므로 $HQ-p \le PQ$
따라서 $HQ-PQ \le p$ 최댓값은 $p$이고 따라서 $p=2$이다.

※ 아래와 같은 상황에서 최댓값이 $p$가 가능할 것임을 알 수 있고 실제로 그럴 때가 있는지 살펴보면 알 수 있다.




5)



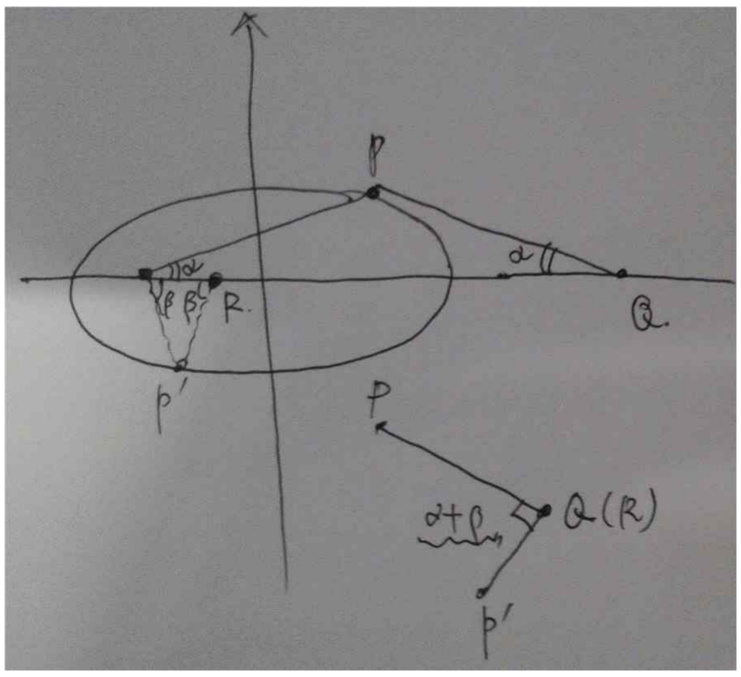

삼각형 $DBC$의 넓이는 $AEC$의 넓이와 같기 때문에(평행선) $AE$의 길이만 구하면 되는 $AEC$의 넓이를 구하도록 한다.

삼각형 $ABC$는 이등변 삼각형이고 $\mathrm{BAC}=2\theta$, $\mathrm{BDC}=\theta$이므로 점 $D, B, C$는 중심이 $A$이고 반지름이 $\sin\theta$인 원위의 점이다. 따라서 $\overline{\mathrm{AD}}=\sin\theta$이고 삼각형 ADC는 이등변 삼각형이다. 선분BC와 직선 AD는 평행이므로 $\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{BCD}$ (엇각)이다.

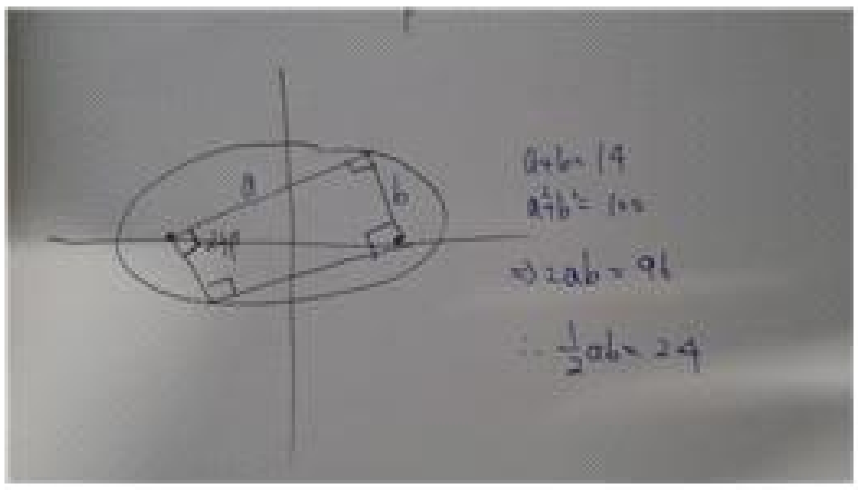
각의 이등분선의 정리에 따라 $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AE}}:\overline{\mathrm{BE}}$
$\overline{\mathrm{BC}}=2\sin^2\theta$이므로 $\overline{\mathrm{AE}}=\mathrm{a}$라 하면 $BE=a\times 2\sin\theta$
$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AE}}+\overline{\mathrm{BE}}$이므로 $a(1+2\sin\theta)=\sin\theta$
따라서 $a=\dfrac{\sin\theta}{1+2\sin\theta}$ (사인법칙을 이용해도 된다)

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to+0}\frac{1}{2}\times\sin2\theta\times\frac{\sin\theta}{1+2\sin\theta}\times\sin\theta\times\frac{1}{\theta^3}=1$$

6)

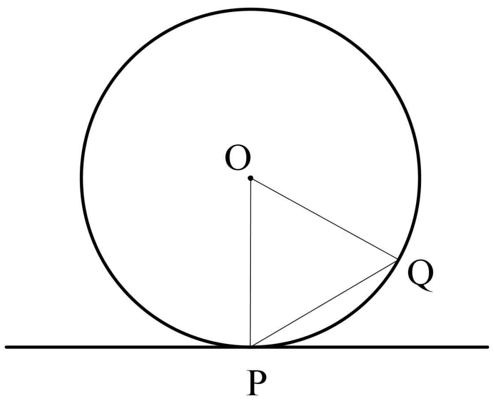



$\overline{\mathrm{PQ}}$와 $x$축이 이루는 각을 $\alpha$, $\overline{\mathrm{P'R}}$와 $x$축이 이루는 각을 $\beta$라고 했을 때, 두 선분이 이루는 각은 $\alpha+\beta$이다. 그런데 삼각형 $FPQ$와 삼각형 $FP'R$은 모두 이등변 삼각형이므로 $\angle P'FP=\alpha+\beta$이고 이 각이 $90^\circ$가 되어야 된다.




위 그림처럼 직사각형이 되고 $a+b=14$ , $a^2+b^2=100$이므로 삼각형의 넓이 $\dfrac{1}{2}ab=24$이다.

7) (가) 조건에 의해 선분 PR와 평면 $\alpha$가 이루는 각은 $30^\circ$이다.

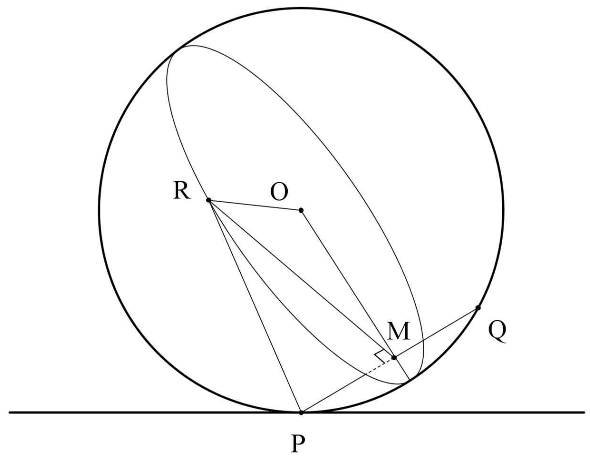



(나) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$

$\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{PR}}|\cos\theta=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$

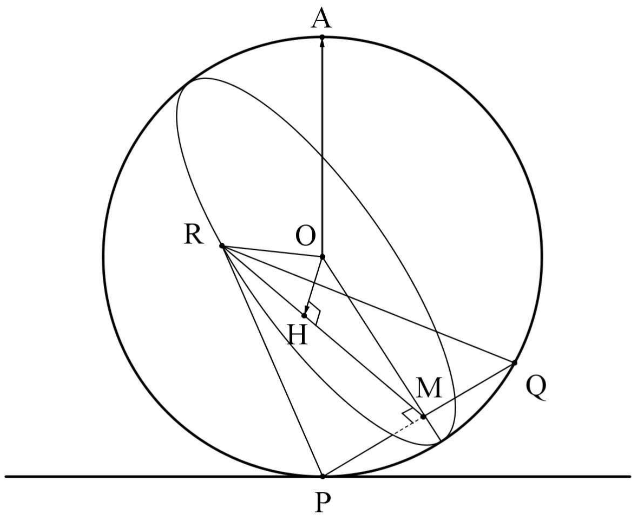
$\Rightarrow|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|\cos\theta=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$

∴ 구 위의 점 R은 선분 PQ의 중심에 정사영 된다.



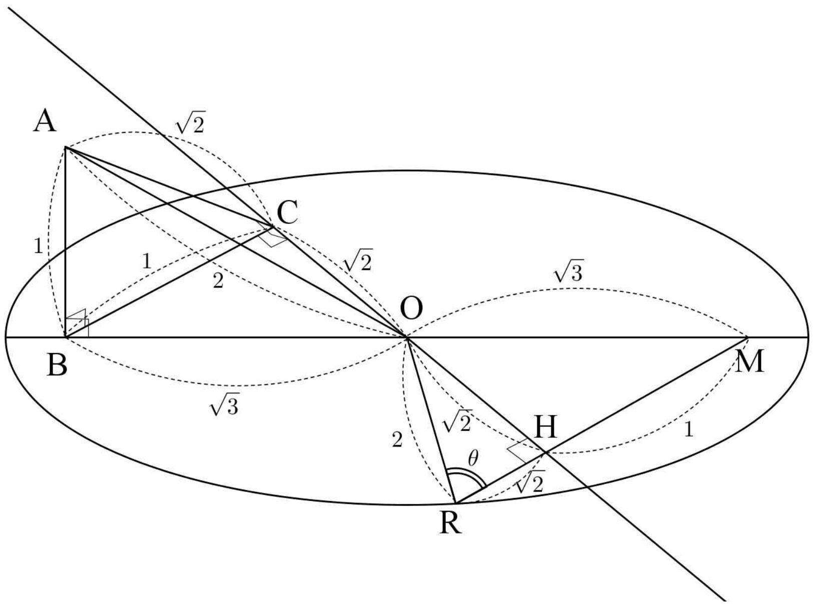

위 그림처럼 점 R은 선분 PQ의 중심 M을 지나며 선분 PQ와 수직인 평면과 구의 교선 위를 움직인다.

(다) 조건에서 평면 PQR와 평면 $\alpha$의 이면각은 $45^\circ$라고 했다.




평면 $\alpha$의 법선벡터는 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$이고 평면 PQR의 법선벡터는 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$이므로 두 법선벡터가 이루는 예각의 크기가 $45^\circ$이다.

점 R이 움직이고 있는 평면을 평면 $\beta$라고 하고 그 때의 교선인 원만 따로 생각해 보자.




점 A에서 평면 $\beta$에 내린 수선의 발을 B라고 하고 점 B에서 직선 OH에 내린 수선의 발을 C라고 하자.

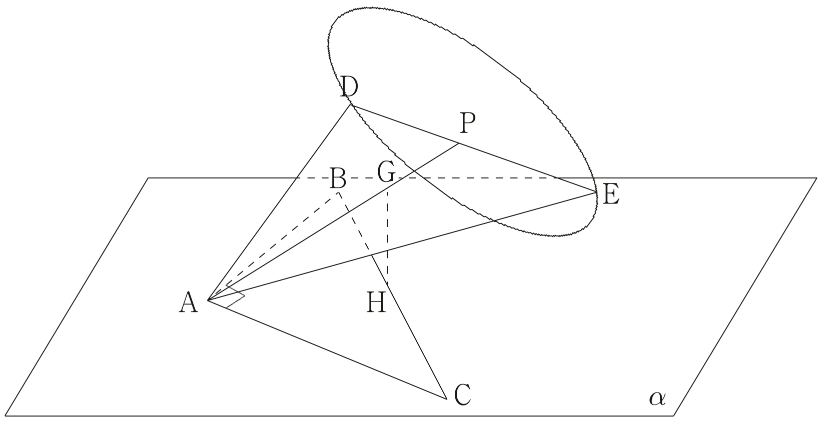
두 평면의 법선벡터가 이루는 예각의 크기가 $45^\circ$이므로 직선 OH와 직선 OA가 이루는 예각의 크기가 $45^\circ$
$\Rightarrow \angle AOC = 45^\circ$

$\overline{AO}$는 반지름 길이인 2이고 $\angle AOC = 45^\circ$이므로 삼각비와 피타고라스 정리를 이용하여 위 그림과 같이 주어진 모든 선분의 길이를 구할 수 있다.

직선 OR과 직선 MR이 이루는 각의 크기는 $\angle ORH$ 와 같고, $\overline{OR}=2$, $\overline{RH}=\sqrt{2}$, $\overline{OH}=\sqrt{2}$ 이므로 $\theta = 45^\circ$다.

$\therefore\ 10\cos^2\theta = 5$

8) 선분 DE의 중점을 P라고 하면, 점 A와 G가 고정되어 있으므로 점 P도 고정된 점이고, 선분 DE의 자취는 아래 그림과 같이 P를 중심으로 하고 선분 AP에 수직인 원이 되며, 주어진 조건에 의하여 $\overline{AH}=\sqrt{3}$, $\overline{AG}=2$, $\overline{AP}=3$이므로, 이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$이 된다.




한편, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HP}+\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{HP}+\overrightarrow{PE}$이고,

$\overrightarrow{CH}=-\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{PE}=-\overrightarrow{PD}$이므로,

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{EC}=\{\overrightarrow{HP}+(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{PD})\}\cdot\{\overrightarrow{HP}-(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{PD})\}$
$=|\overrightarrow{HP}|^2-|\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{PD}|^2$이 된다.

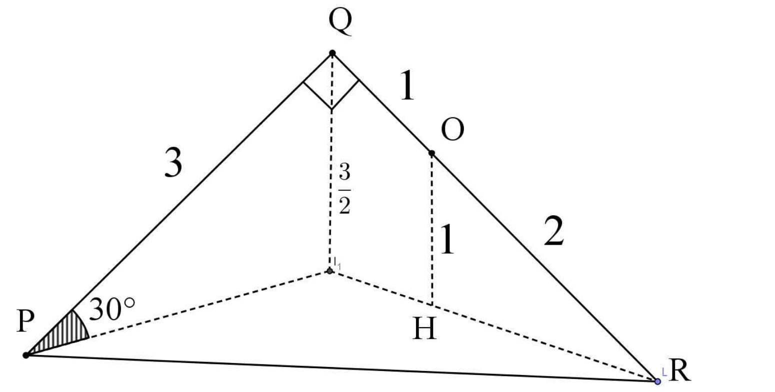
그런데 $\overline{GH}=\overline{GP}=1$, $\angle HGP=\frac{2}{3}\pi$이므로, $|\overrightarrow{HP}|=\sqrt{3}$가 되고, 위 식의 최댓값과 최솟값은 $|\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{PD}|$가 최솟값과 최댓값을 가질 때를 찾으면 된다.

$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AP}$이므로, $\overrightarrow{BH}$와 평행한 $\overrightarrow{PD}$가 존재하므로, 최솟값은 두 벡터가 평행하고 방향이 반대일 때 0, 최댓값은 두 벡터가 평행하고 방향이 같을 때 $2\sqrt{3}$이 된다.

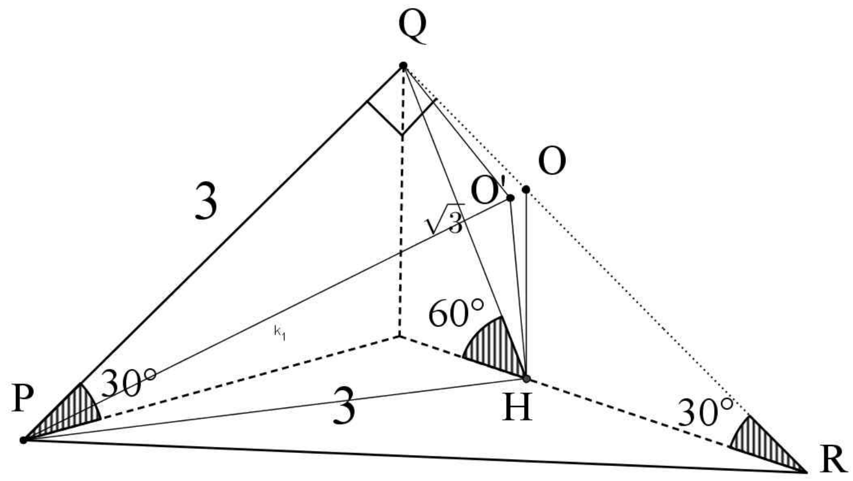
그러므로 두 벡터의 내적의 최댓값은 3, 최솟값은 $-9$이고, $M^2+m^2=90$이 된다.

9) 739

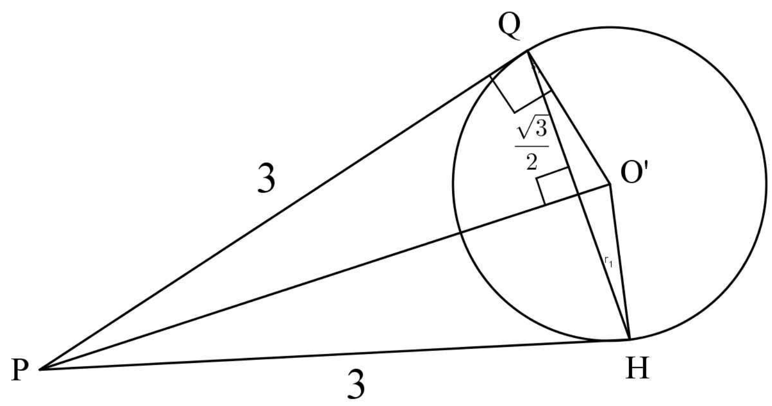
정사영 된 넓이를 구하기 위해 정사영 시킬 도형과 두 평면사이의 이면각을 구하도록 한다.




그림을 간략화 하면 위와 같고 삼각비와 닮음을 이용하여 $\overline{OR}=2$임을 알 수 있고 결국 삼각형 PQR은 직각이등변 삼각형임을 알 수 있다. 따라서 삼각형 PQR의 넓이는 $\frac{9}{2}$이다.




구의 중심 O에서 평면 PQH에 수선의 발을 내리고 그 점을 O′이라 하자. 위 그림과 같이 QH의 길이는 $\sqrt{3}$이고 평면 PQH만 따로 떼어서 생각해 보도록 한다.




이면각의 크기는 $\angle OQO'$이고 $\overline{OQ}=1$이므로 $\cos\theta$를 구하기 위해서는 $\overline{O'Q}$만 구하면 된다. 위 그림에서 삼각형의 닮음을 이용하여 $\overline{O'Q}=\frac{3}{\sqrt{11}}$

따라서 $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{11}}$

구하고자 하는 넓이는 $\frac{9}{2} \times \frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{27}{2\sqrt{11}}$

$44S^2 = 739$