제 2 교시

수학 영역

5 지 선 다 형

1. $\sqrt[3]{8}\times\dfrac{2^{\sqrt{2}}}{2^{1+\sqrt{2}}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

$(2^3)^{\frac{1}{3}} \times 2^{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}} = 2\times\frac{1}{2}=1$

2. 함수 $f(x)=2x^3-x^2+6$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x)=6x^2-2x$

$f'(1)=6-2=4$

3. 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_5=4,\ a_7=4a_6-16$$

을 만족시킬 때, a_8의 값은? [3점]

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

· $ar^4=4$

· $ar^6=4ar^5-16 \Leftrightarrow 4r^2=16r-16$

$(r-2)^2=0$

$\therefore r=2$

$a_8=ar^7=4r^3=32$

4. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)\,dt = x^3-ax+1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$x=1$ 대입 $0=1-a+1 \Leftrightarrow a=2$

양변 미분 $f(x)=3x^2-2$

$\therefore f(2)=12-2=10$

5. $\cos(\pi+\theta)=\frac{1}{3}$ 이고 $\sin(\pi+\theta)>0$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

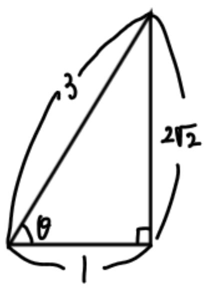
① $-2\sqrt{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

$\cos\theta = -\frac{1}{3}$

$\sin\theta < 0$

$\tan\theta > 0$

(제 3사분면)



$\Rightarrow \tan\theta = 2\sqrt{2}$

6. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-ax+1 & (x<2) \\ -x+1 & (x\geq 2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$ 이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a 의 값의 합은? [3점]

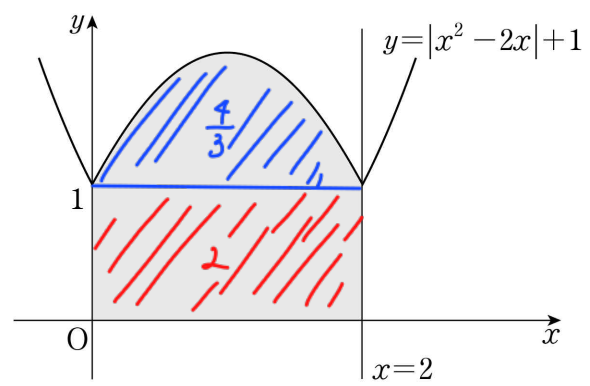
① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$4-2a+1=-1 \Rightarrow a=3$

$4-2a+1=1 \Rightarrow a=2$

7. 함수 $y=|x^2-2x|+1$ 의 그래프와 x 축, y 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4



이차함수 넓이 공식

$\Rightarrow \frac{1}{6}(2)^3 = \frac{4}{3}$

$\therefore \frac{4}{3}+2=\frac{10}{3}$

8. 두 점 $\mathrm{A}(m, m+3)$, $\mathrm{B}(m+3, m-3)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이 곡선 $y=\log_4(x+8)+m-3$ 위에 있을 때, 상수 m의 값은? [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

내분점 $\left(\frac{2m+6+m}{3}, \frac{2m-6+m+3}{3}\right)$

$\Leftrightarrow (m+2, m-1)$

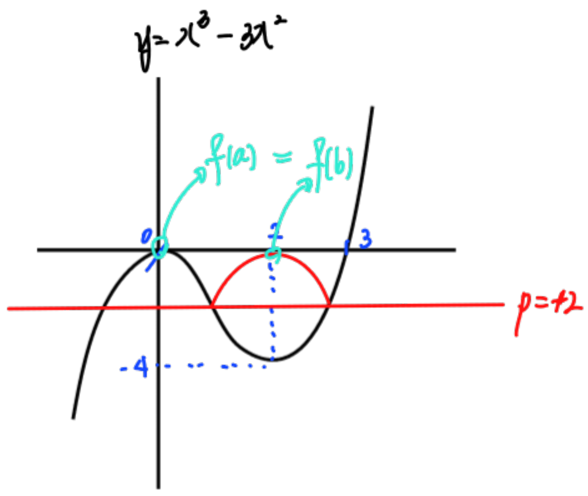
대입 $m-1=\log_4(m+10)+m-3$

$16=m+10$

$\therefore m=6$

9. 함수 $f(x)=|x^3-3x^2+p|$는 $x=a$와 $x=b$에서 극대이다. $f(a)=f(b)$일 때, 실수 p의 값은?
(단, a, b는 $a \neq b$인 상수이다.) [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$



10. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

> (가) $|a_4|+|a_6|=8$
>
> (나) $\sum_{k=1}^{9} a_k = 27$

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

(나) 에서 $\sum_{k=1}^{9} a_k = 27 = 9a_5$ $\therefore a_5=3$

(가) a_4, a_6 모두 양수, 음수이면

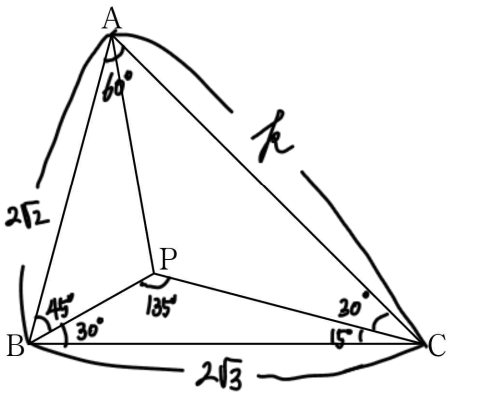
$a_5 = 4$ or -4 (모순)

$\therefore a_4<0,\ a_6>0$

$-a-3d+a+5d=2d=8$ $\therefore d=4$

$a_{10}=3+20=23$

11. 그림과 같이 $\angle \mathrm{BAC}=60°$, $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{3}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내부의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PBC}=30°$, $\angle \mathrm{PCB}=15°$ 일 때, 삼각형 APC의 넓이는? [4점]



① $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ ④ $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $2+\sqrt{3}$

사인법칙 $\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle A)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\angle C)} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3}}{\sin(60°)} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin(\angle C)}$

$\therefore \angle ACB = 45°$

$\frac{2\sqrt{3}}{\sin(\angle BPC)} = \frac{\overline{CP}}{\sin(\angle PBC)} \Rightarrow \overline{CP} = \sqrt{6}$

$\overline{AC} = k$라 하면

$\cos 60° = \frac{8+k^2-12}{2\times 2\sqrt{2}\times k} \Leftrightarrow k^2-2\sqrt{2}k-4=0$

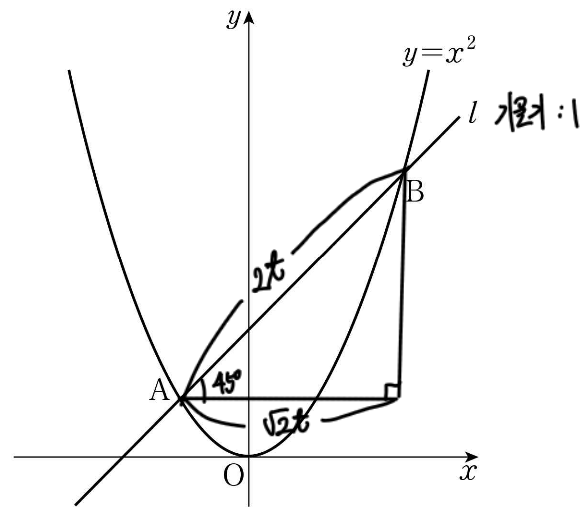
$\therefore k=\sqrt{2}+\sqrt{6}$ $(\because k>0)$

△APC의 넓이

$\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times(\sqrt{2}+\sqrt{6})\times\frac{1}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$

12. 곡선 $y=x^2$과 기울기가 1인 직선 l이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 양의 실수 t에 대하여 선분 AB의 길이가 $2t$가 되도록 하는 직선 l의 y절편을 $g(t)$라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t^2}$ 의 값은? [4점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1



$\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=x+g(t) \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-x-g(t)=0$

두 근의 차 공식 $\Rightarrow \sqrt{1+4g(t)} = \sqrt{2}t$

$1+4g(t)=2t^2$

$g(t)=\frac{2t^2-1}{4}$

$\Rightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{2t^2-1}{4t^2} = \frac{1}{2}$

13. 두 함수

$$f(x)=x^2+ax+b,\ g(x)=\sin x$$

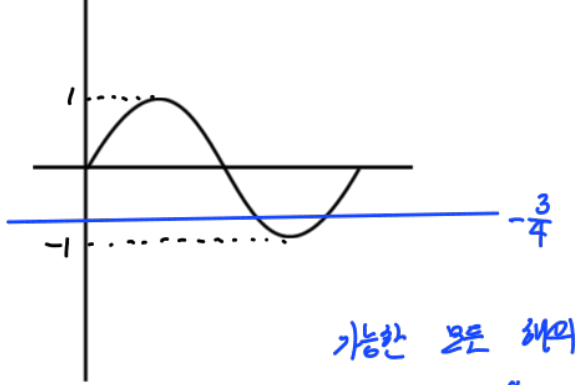
가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?
(단, a, b는 상수이고, $0 \le a \le 2$이다.) [4점]

> (가) $\{g(a\pi)\}^2=1$
> (나) $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $f(g(x))=0$의 모든 해의 합은 $\frac{5}{2}\pi$이다.

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

(가)에서 $a=\frac{1}{2}$ or $\frac{3}{2}$

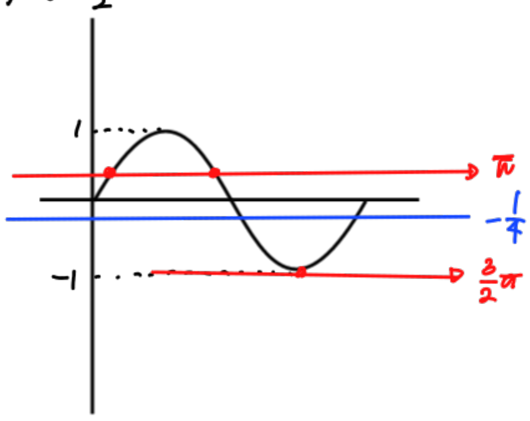
i) $a=\frac{3}{2} \Rightarrow f(x)=x^2+\frac{3}{2}x+b$



$-\frac{3}{4}$

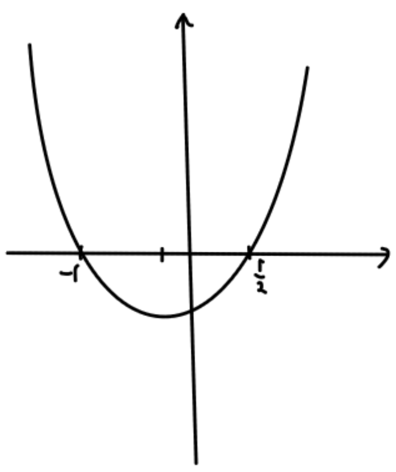
가능한 모든 해의 합
$3\pi, 6\pi, \frac{9}{2}\pi, \pi, \frac{\pi}{2}, 0$ (X)

ii) $a=\frac{1}{2}$



π
$-\frac{1}{4}$ ⇒ 근의 합 $\frac{5}{2}\pi$
$\frac{3}{2}\pi$

⇒



$f(x)=(x+1)(x-\frac{1}{2})$
$f(2)=\frac{9}{2}$

14. 세 양수 a, b, k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} ax & (x<k) \\ -x^2+4bx-3b^2 & (x \ge k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $a=1$이면 $f'(k)=1$이다.
ㄴ. $k=3$이면 $a=-6+4\sqrt{3}$이다.
ㄷ. $f(k)=f'(k)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{3}$이다.

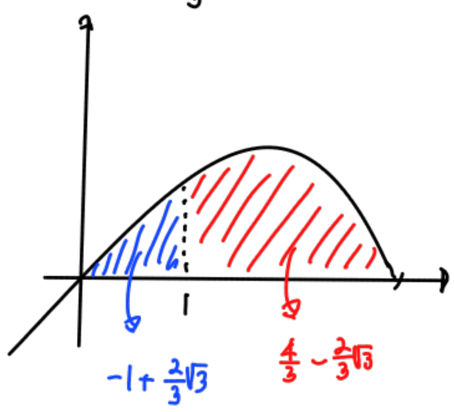
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$ak=-k^2+4bk-3b^2$
$a=-2k+4b \Rightarrow ak=-2k^2+4bk$] $\Rightarrow k^2=3b$

ㄱ $a=1$
$f'(k)=a=1$

ㄴ $k=3$, $b=\sqrt{3}$ $\Rightarrow a=-6+4\sqrt{3}$

ㄷ $a=ak \Rightarrow k=1$, $b=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow a=-2+\frac{4}{3}\sqrt{3}$



넓이 $=\frac{1}{3}$

15. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}+a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n) & (a_{n+1}+a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_1=1$일 때, $a_6=34$가 되도록 하는 모든 a_2의 값의 합은? [4점]

① 60 ② 64 ③ 68 ④ 72 ⑤ 76

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	
~~짝~~	~~짝~~	~~짝~~	~~짝~~	~~짝~~	~~짝~~	X
	홀	홀	홀	홀	홀	i)
			홀	짝	홀	ii)
			짝	홀	홀	iii)
			~~짝~~	~~짝~~	~~짝~~	X

i) $a_1=1$
$a_2=k_1$
$a_3=\frac{1}{2}+\frac{k_1}{2}$
$a_4=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}k_1$
$a_5=\frac{3}{8}+\frac{5}{8}k_1$
$a_6=\frac{5}{16}+\frac{11}{16}k_1=34$
$\Rightarrow \frac{11}{16}k_1=\frac{539}{16}$
$k_1=49$

ii) $a_1=1$
$a_2=k_2$
$a_3=1+k_2$
$a_4=1+2k_2$
$a_5=\frac{3}{2}k_2+1$
$a_6=\frac{7}{4}k_2+1=34$
$\Rightarrow \frac{7}{4}k_2=33$
$k_2\neq$ (자연수)

iii) $a_1=1$
$a_2=k_3$
$a_3=\frac{1}{2}+\frac{k_3}{2}$
$a_4=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}k_3$
$a_5=2k_3+1$
$a_6=\frac{7}{4}k_3+\frac{3}{4}=34$
$\Rightarrow \frac{7}{4}k_3=\frac{133}{4}$
$k_3=19$

$k_1+k_3=68$

단 답 형

16. $\log_2 96-\frac{1}{\log_6 2}$의 값을 구하시오. [3점] 4

$\log_2 96-\log_2 6=\log_2 16=4$

17. 직선 $y=4x+5$가 곡선 $y=2x^4-4x+k$에 접할 때, 상수 k의 값을 구하시오. [3점] 11

$8x^3-4=4 \Rightarrow x=1$

$(1,9)$ 대입 $\Rightarrow 2-4+k=9$

$k=11$

18. n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2-5nx+4n^2=0$$

의 두 근을 α_n, β_n이라 하자.
$\sum_{n=1}^{7}(1-\alpha_n)(1-\beta_n)$의 값을 구하시오. [3점]

427

· $\alpha_n+\beta_n=5n$
· $\alpha_n\beta_n=4n^2$

$$\sum_{n=1}^{7}\left(1-(\alpha_n+\beta_n)+\alpha_n\beta_n\right)=\sum_{n=1}^{7}\left(1-5n+4n^2\right)$$

$$=7-5\times\frac{7\times8}{2}+4\times\frac{7\times8\times15}{6}$$

$$=427$$

19. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-15t+k,\quad v_2(t)=-3t^2+9t$$

이다. 점 P와 점 Q가 출발한 후 한 번만 만날 때, 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

18

$x_1(t)=t^3-\frac{15}{2}t^2+kt$

$x_2(t)=-t^3+\frac{9}{2}t^2$

$\Downarrow$

$x_1(t)=x_2(t) \Leftrightarrow 2t^3-12t^2+kt$

$=t(\underbrace{2t^2-12t+k}_{\text{중근}})$

$D/4=36-2k=0$

$\therefore k=18$

20. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=1$인 삼차함수 $f(x)$와 양의 실수 p에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

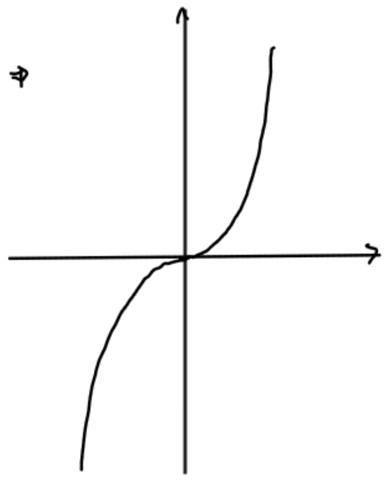
66

(가) $g'(0)=0$

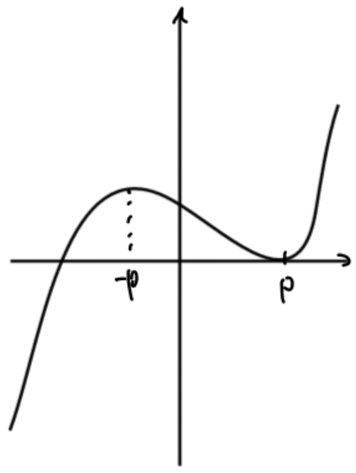
(나) $g(x)=\begin{cases} f(x-p)-f(-p) & (x<0) \\ f(x+p)-f(p) & (x\ge 0)\end{cases}$

$\int_0^p g(x)\,dx=20$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

$g(x) \Rightarrow$

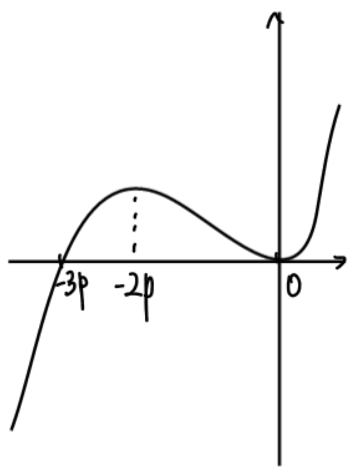


$f(x) \Rightarrow$



$$\int_0^p g(x)dx=\int_0^p\{f(x+p)-f(p)\}dx=\int_0^p[x^3+3px^2]dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+px^3\right]_0^p=\frac{5}{4}p^4=20 \Rightarrow \underline{p=2}$$



$\Rightarrow x^3+3px^2$

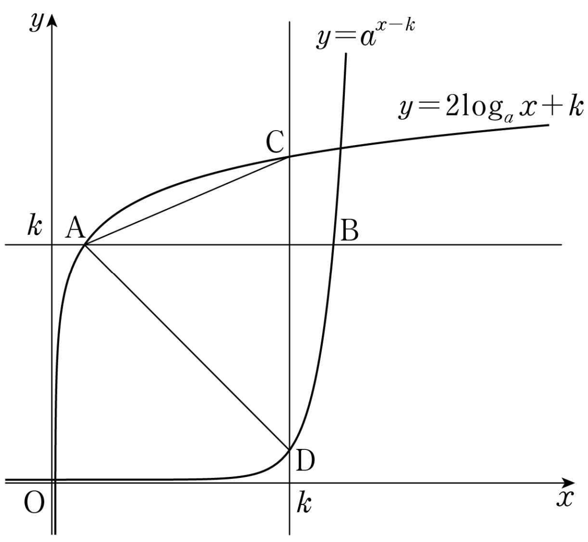
$f(x)=x^3+3px^2+1$

$f(5)=125-60+1$

$=66$

21. 그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, k에 대하여 직선 $y=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB}\times\overline{CD}=85$이고 삼각형 CAD의 넓이가 35일 때, $a+k$의 값을 구하시오. [4점]

12



A $(1, k)$

B $(\log_a k + k, k)$

C $(k, 2\log_a k + k)$

D $(k, 1)$

$\overline{AB}\times\overline{CD} = (\log_a k + k - 1)\times(2\log_a k + k - 1) = 85$

$\Rightarrow \triangle CAD = \frac{1}{2}\times(k-1)\times(2\log_a k + k - 1) = 35$

$\log_a k = \alpha$, $k-1=\beta$ 치환

$(\alpha+\beta)\times(2\alpha+\beta)=85$

$(\beta)\times(2\alpha+\beta)=70$

$\Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{17}{14}$

$14\alpha = 3\beta$

대입

$\therefore \beta=7,\ k=8,\ a=4$

$a+k=12$

22. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)-t|$라 할 때, $\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k의 개수를 $h(t)$라 하자.

729

극한의 값 존재 → 좌극한 = 우극한!

함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{t\to 4+} h(t)=5$
>
> (나) 함수 $h(t)$는 $t=-60$과 $t=4$에서만 불연속이다.

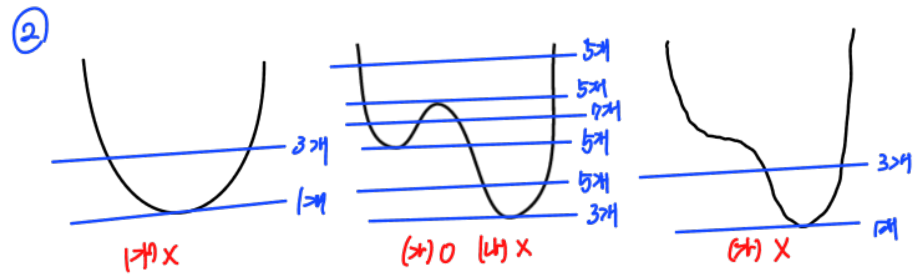
$f(2)=4$이고 $f'(2)>0$일 때, $f(4)+h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

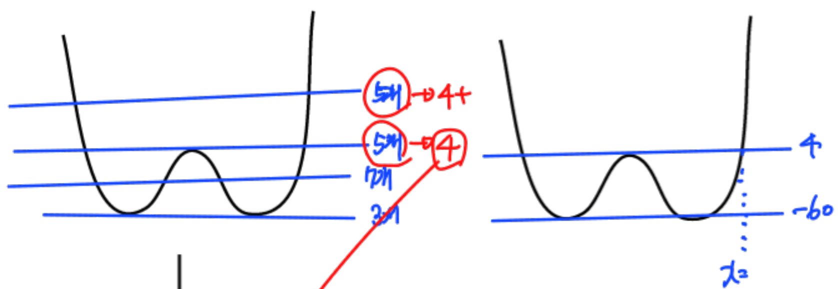
① 조건 해석

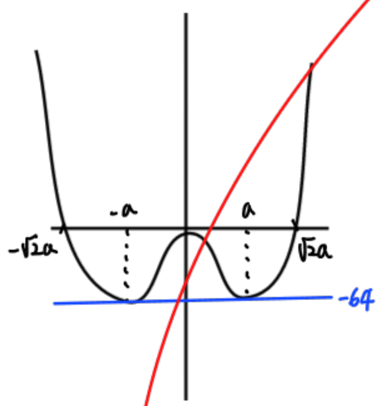
$\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k} = \lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{-x+k} = 0$ or $g'(k+) = -g'(k-)$

{$g'(k)=0$인 k의 개수 + 절댓값에 의해 생긴 극점의 개수} = $h(t)$

②







$\Rightarrow A(x) = x^2(x+\sqrt{2}a)(x-\sqrt{2}a)$

$= x^4 - 2a^2x^2 = x^4 - 16x^2$

$A(a) = -a^4 = -64 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$

$f(4) = A(6) + 4 = 36\times 20 + 4 = 724$

$h(4) = 5$

$\Rightarrow f(4) + h(4) = 729$

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. ${}_3\mathrm{P}_2 + {}_3\Pi_2$ 의 값은? [2점]

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

$3\times2 + 3^2 = 6 + 9 = 15$

24. 5명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

$(5-1)! = 24$

25. 문자 A, A, A, B, B, B, C, C가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드를 모두 일렬로 나열할 때, 양 끝 모두에 B가 적힌 카드가 놓이도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 문자가 적혀 있는 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 45 ② 50 ③ 55 ④ 60 ⑤ 65

B _ _ _ _ _ _ B

A: 3장
B: 1장
C: 2장

$\frac{6!}{3!2!} = 60$

26. 서로 다른 공 6개를 남김없이 세 주머니 A, B, C에 나누어 넣을 때, 주머니 A에 넣은 공의 개수가 3이 되도록 나누어 넣는 경우의 수는? (단, 공을 넣지 않는 주머니가 있을 수 있다.) [3점]

① 120 ② 130 ③ 140 ④ 150 ⑤ 160

1) A에 공 3개 넣기

$_6C_3 = 20$

2) 남은 공 3개 B,C에 넣기

$_2\Pi_3 = 8$

$\therefore 20 \times 8 = 160$

27. 방정식 $a+b+c+3d=10$을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [3점]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

$a' = a-1$
$b' = b-1$
$c' = c-1$
$d' = d-1$
$\Rightarrow$ $a+b+c+3d=10$
$a'+b'+c'+3d' = 4$

i) $d'=0$ 인 경우

$a'+b'+c' = 4$ ${}_3H_4 = {}_6C_4 = 15$

ii) $d'=1$ 인 경우

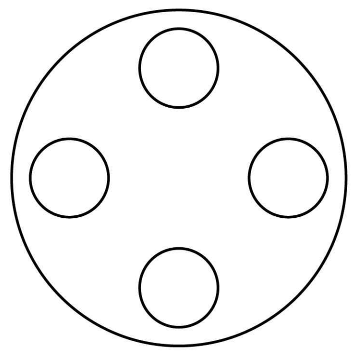
$a'+b'+c' = 1$ ${}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$

$\therefore\ 15+3 = 18$

28. 원 모양의 식탁에 같은 종류의 비어 있는 4개의 접시가 일정한 간격을 두고 원형으로 놓여 있다. 이 4개의 접시에 서로 다른 종류의 빵 5개와 같은 종류의 사탕 5개를 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 나누어 담는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

> (가) 각 접시에는 1개 이상의 빵을 담는다.
> (나) 각 접시에 담는 빵의 개수와 사탕의 개수의 합은 3 이하이다.

① 420 ② 450 ③ 480 ④ 510 ⑤ 540



묶음 4개

빵 2,1,1,1 OO O O O ${}_5C_2 = 10$

사탕 i) △ △△ △△ ${}_3C_1 = 3$

△ △△ △ △ ${}_3C_1 = 3$

ii) X △△ △△ △ ${}_3C_1 = 3$

$\Rightarrow$ 9가지

묶음 배치 $(4-1)! = 6$

$\rightsquigarrow 10 \times (3+3+3) \times 3! = 540$

단답형

29. 숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 다음 조건을 만족시키도록 여섯 개를 선택한 후, 선택한 숫자 여섯 개를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

120

(가) 숫자 1, 2, 3을 각각 한 개 이상씩 선택한다.
(나) 선택한 여섯 개의 수의 합이 4의 배수이다.

1, 2, 3, ?, ?, ?

최소 1, 1, 1, 1, 2, 3 ⇒ 9

최대 1, 2, 3, 3, 3, 3 ⇒ 15

⇒ 가능한 4의 배수 12

1, 1, 2, 2, 3, 3 ⇒ $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$

1, 2, 2, 2, 2, 3 ⇒ $\frac{6!}{4!} = 30$

∴ 90 + 30 = 120

30. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

45

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다.
(나) $f(2) \ne 1$이고 $f(4) \times f(5) < 20$이다.

(가) ${}_5H_5 = {}_9C_5 = 126$

여사건 $f(2)=1$, $f(4) \times f(5) \ge 20$

i) $f(2)=1$ 인 경우

$f(1)=1$, ${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$

ii) $f(4) \times f(5) \ge 20$ 인 경우

$f(4)$	$f(5)$	
4	5	⇒ ${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$
5	5	⇒ ${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$

} ⇒ 55

iii) $f(2)=1$, $f(4) \times f(5) \ge 20$ 인 경우

$f(2)$	$f(4)$	$f(5)$	$f(1)$ $f(3)$
1	4	5	⇒ 1×4 = 4
1	5	5	⇒ 1×5 = 5

} ⇒ 9

여사건 35 + 55 − 9 = 81

∴ 126 − 81 = 45

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5 지 선 다 형

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)(3n-1)}{n^2+1}$ 의 값은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2+n-1}{n^2+1}=6$

24. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$3^n-2^n<a_n<3^n+2^n$$

을 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{3^{n+1}+2^n}$ 의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{6}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{3^{n+1}+2^n}\le\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{3^{n+1}+2^n}\le\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+2^n}{3^{n+1}+2^n}$

By Sandwich

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{3^{n+1}+2^n}=\dfrac{1}{3}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+2^n}{3^{n+1}+2^n}=\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{3^{n+1}+2^n}=\dfrac{1}{3}$

25. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}-6n}{a_n+5}=4$$

일 때, a_2-a_1의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

공차?

$a_n = a+(n-1)d$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}-6n}{a_n+5} \fallingdotseq \lim_{n\to\infty}\frac{2dn-6n}{dn} = \frac{2d-6}{d} = 4$$

$\therefore d=-3$

26. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+1)a_n=3,\ \lim_{n\to\infty}(4n^2+1)(a_n+b_n)=1$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)(a_n+2b_n)$의 값은? [3점]

① -3 ② $-\frac{7}{2}$ ③ -4 ④ $-\frac{9}{2}$ ⑤ -5

* 야매는 알아서...

$$\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)(a_n+2b_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}2(2n^2+1)(a_n+b_n)-\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)(a_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}2(4n^2+1)(a_n+b_n)\left(\frac{2n^2+1}{4n^2+1}\right)-\lim_{n\to\infty}(n^2+1)(a_n)\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)$$

$$=2\times1\times\frac{1}{2}-3\times2=-5$$

27. $a_1=3$, $a_2=-4$인 수열 $\{a_n\}$과 등차수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}=\frac{6}{n+1}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$의 값은? [3점]

① -54　② $-\frac{75}{2}$　③ -24　④ $-\frac{27}{2}$　⑤ -6

i) $n=1$

$\frac{a_1}{b_1}=\frac{6}{2}=3 \Rightarrow b_1=1$

ii) $n=2$

$3+\frac{a_2}{b_2}=2 \Rightarrow b_2=4$

$\Rightarrow b_n=1+3(n-1)=3n-2$

iii)

$\frac{a_n}{b_n}=\frac{6}{n+1}-\frac{6}{n}=\frac{-6}{n(n+1)}$

$a_n=\frac{-6(3n-2)}{n(n+1)}$

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\frac{-6(3n-2)(3n-2)}{n(n+1)}=-54$

28. $a>0$, $a\neq1$인 실수 a와 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$이 y축과 만나는 점을 A_n, 직선 $y=n$이 곡선 $y=\log_a(x-1)$과 만나는 점을 B_n이라 하자. 사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$의 넓이를 S_n이라 할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}}{S_n}=\frac{3}{2a+2}$$

을 만족시키는 모든 a의 값의 합은? [4점]

① 2　② $\frac{9}{4}$　③ $\frac{5}{2}$　④ $\frac{11}{4}$　⑤ 3

$A_n=(0,n)$

$A_{n+1}=(0,n+1)$

$B_n=(a^n+1,n)$

$B_{n+1}=(a^{n+1}+1,n+1)$

$\Rightarrow \overline{B_nB_{n+1}}=\sqrt{(a^{n+1}-a^n)^2+1}=\sqrt{(a-1)^2a^{2n}+1}$

$\boxed{S_n} \Rightarrow S_n=\frac{1}{2}\cdot1\cdot((a+1)a^n+2)$

i) $0<a<1$

☆ $\lim_{n\to\infty}a^n=0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{B_nB_{n+1}}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{(a-1)^2a^{2n}+1}}{(a+1)a^n+2}=\frac{2}{2}=1=\frac{3}{2a+2}$

$\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

ii) $a\geq1$

$\lim_{n\to\infty}a^n=\infty$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{B_nB_{n+1}}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{(a-1)^2a^{2n}+1}}{(a+1)a^n+2}=\frac{2(a-1)}{a+1}=\frac{3}{2a+2}$

$\Leftrightarrow 4a-4=3$

$\Leftrightarrow a=\frac{7}{4}$

$\Rightarrow a=\frac{7}{4}$

$\therefore \frac{1}{2}+\frac{7}{4}=\frac{9}{4}$

단답형

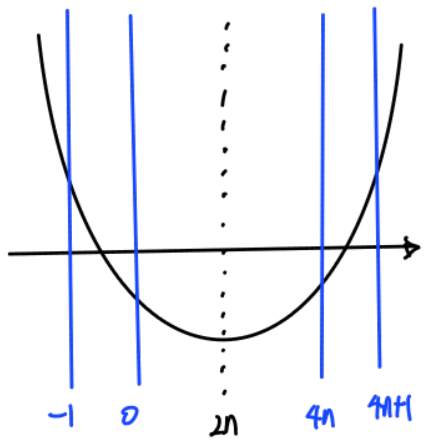
29. 자연수 n에 대하여 x에 대한 부등식 $x^2-4nx-n<0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 a_n이라 하자. 두 상수 p, q에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{na_n}-pn\right)=q$$

일 때, $100pq$의 값을 구하시오. [4점]

50

근: $2n\pm\sqrt{4n^2+n}$ ⇒ $2n<\sqrt{4n^2+n}<2n+1$



$x=0, 1, \cdots, 4n$ ⇒ $a_n=4n+1$

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{na_n}-pn\right)=q \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n}-pn\right)=q$

∴ ($p=2$) ($\infty-\infty$가 수렴함)

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}=\dfrac{1}{4}=q$

$100\times2\times\dfrac{1}{4}=50$

★ $\sqrt{na_n}-pn$ 을 잘보면... $a_n=an+b$ 꼴...?

대입 ⇒ 규칙

i) $n=1$

x^2-4x-1 근: $2\pm\sqrt{5}$ 0,1,2,3,4 5개

ii) $n=2$

x^2-8x-2 근: $4\pm\sqrt{18}$ 0,1,2,3,4,5,6,7,8 9개

$a_n=4n+1$

30. 함수

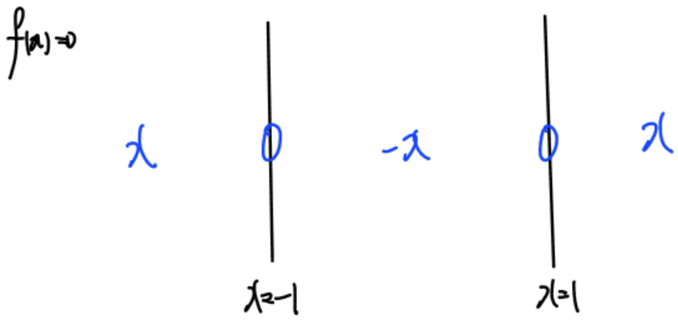
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$$

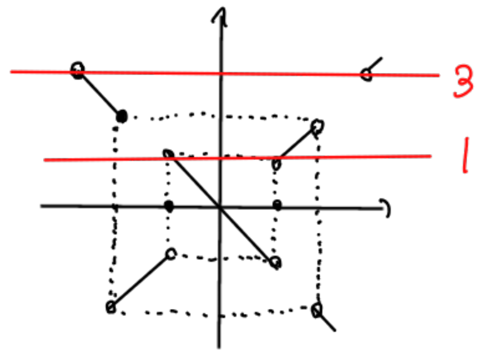
에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

25

> $2k-2\le|x|<2k$일 때,
>
> $g(x)=(2k-1)\times f\left(\dfrac{x}{2k-1}\right)$
>
> 이다. (단, k는 자연수이다.)

$0<t<10$인 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나지 않도록 하는 모든 t의 값의 합을 구하시오. [4점]





$1+3+5+7+9=25$

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.