제 2 교시

2015학년도 대학수학능력시험 대비

강기원 모의고사 제 3회

수 학 영 역 [B형]

성명	

수험 번호					-				

○ 자신이 선택한 유형(A형/B형)의 문제인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

이 문제들은 쉽다고 자기최면을 걸어보자.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

제 2 교시

수학 영역 [B형]

5 지 선 다 형

1. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A+2E$의 모든 성분의 합이 12일 때, a의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

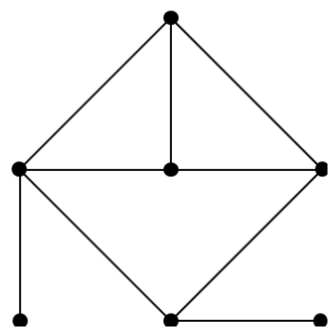
2. $\int_{-2}^{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)dx$의 값을 구하면? [2점]

① $e^{-2}-e^{2}$ ② $e^{2}-e^{-2}$ ③ 0 ④ $e^{2}+e^{-2}$ ⑤ $2e^{2}$

3. 평면 $2x+y+2z+7=0$과 점 $(1,1,1)$사이의 거리를 구하면? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 다음 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중 0의 개수는? [4점]



① 29 ② 31 ③ 33 ④ 35 ⑤ 37

5. $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{10}$의 전개식에서 x^2 앞의 계수를 구하면? [3점]

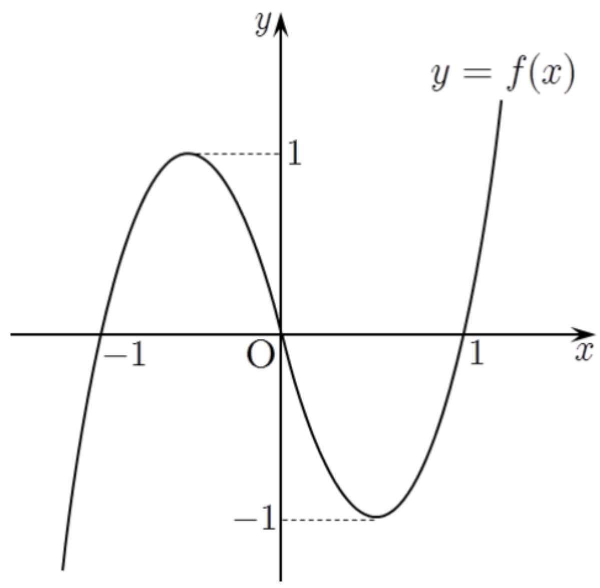
① -252 ② -210 ③ 0
④ 210 ⑤ 252

6. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음을 만족할 때, $b_6 \times b_{10}$의 값을 구하면? [3점]

(가) $a_{n+1}=2a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$
(나) $a_8=8$
(다) $a_{n+2}-a_n=b_n$

① 128 ② 256 ③ 512
④ 576 ⑤ 724

7. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같이 x축과 세 점 $(-1,0)$, $(0,0)$, $(1,0)$에서 만나고 -1과 1을 각각 극대값과 극소값으로 가진다. 이 때, 무리방정식 $\sqrt{1-\{f(x)\}^2}=x$ 의 실근의 개수를 구하시오. [3점]



① 1개 ② 2개 ③ 3개
④ 5개 ⑤ 7개

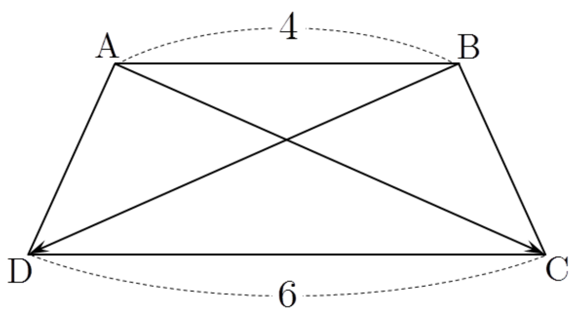
8. 어느 전구의 필라멘트의 저항은 온도에 따라 변하는데 이 전구를 켠 후 필라멘트의 온도와 저항을 각각 T(T), R(Ω)라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\log R = 3\log 2 + k\log\frac{T}{300} \text{ (단, } k\text{는 상수이다.)}$$

이 전구를 켠 후 필라멘트의 저항이 32Ω일 때의 온도가 1200T이었고, 필라멘트의 저항이 128Ω일 때의 온도가 aT이었다. a의 값은? [3점]

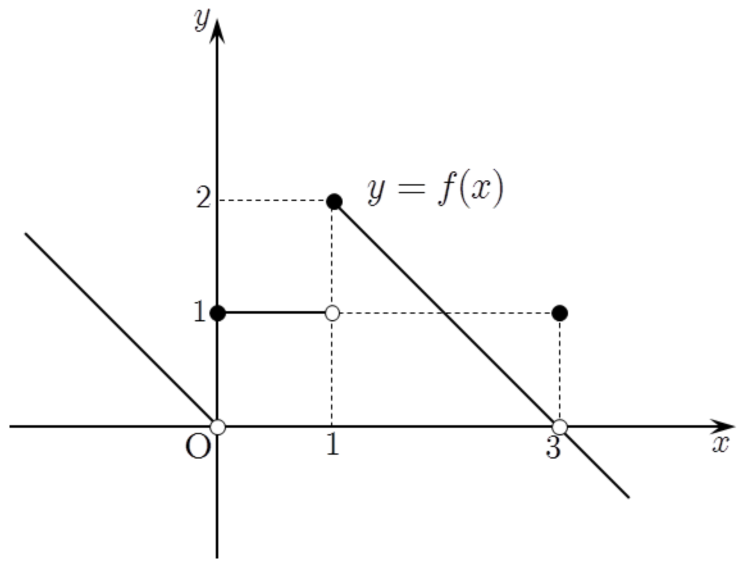
① 4800 ② 5200 ③ 5600 ④ 6000 ⑤ 6400

9. 두 선분 AB, CD가 평행하고 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{CD}}=6$인 등변사다리꼴 ABCD가 있다. $\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}=0$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}}$의 값을 구하면? [3점]



① -36 ② -25 ③ -20 ④ -16 ⑤ -10

10. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같이 주어져 있다..



실수 전체의 집합에서 정의된 연속함수 $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 다음 중 옳은 것만을 모두 고르면? [3점]

ㄱ. $g(0)=0$
ㄴ. $g(0)=g(1)=g(3)$
ㄷ. $y=g(x)$의 그래프는 직선이 될 수 없다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 두 이차정사각행렬 A, B가 다음 조건을 만족한다.

$$ABA-A=2E,\ BAB-B=4E$$

다음 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

ㄱ. $AB-E$의 역행렬이 존재한다.
ㄴ. $B=2A$
ㄷ. $AB=BA$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 다음은 무한급수 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$ 의 값을 구하는 과정이다.

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}{2}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{2}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$$

$$=\boxed{(가)}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)^2$$

이 된다. 그런데 $k\geq 1$에 대하여 $\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\leq 1$이므로

$$0<\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)^2\leq\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)=\boxed{(나)}$$

이고 따라서 다음 부등식이 성립한다.

$$\boxed{(가)}<S_n\leq\boxed{(가)}+\boxed{(나)}$$

$$\frac{\boxed{(가)}}{n}<\frac{S_n}{n}\leq\frac{\boxed{(가)}+\boxed{(나)}}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\boxed{(가)}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\boxed{(가)}+\boxed{(나)}}{n}=\boxed{(다)}$$ 이므로

샌드위치의 정리에 의하여 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\boxed{(다)}$$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고 (다)에 알맞은 값을 p라 할 때, $\log_2 f(p)+\log_2 g(p)$의 값을 구하면? [3점]

① -4 ② $-\frac{7}{2}$ ③ -3
④ $-\frac{5}{2}$ ⑤ -2

[13~14] 두 실수 a, b와 함수 $f(x)=a\cos x+b\sin x$에 대하여 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$의 최댓값이 4일 때, $|ab|$의 최댓값을 구하면?[3점]

① 1 ② 2 ③ 4
④ 8 ⑤ 16

14. 집합 M이 다음과 같이 정의되어 있다.

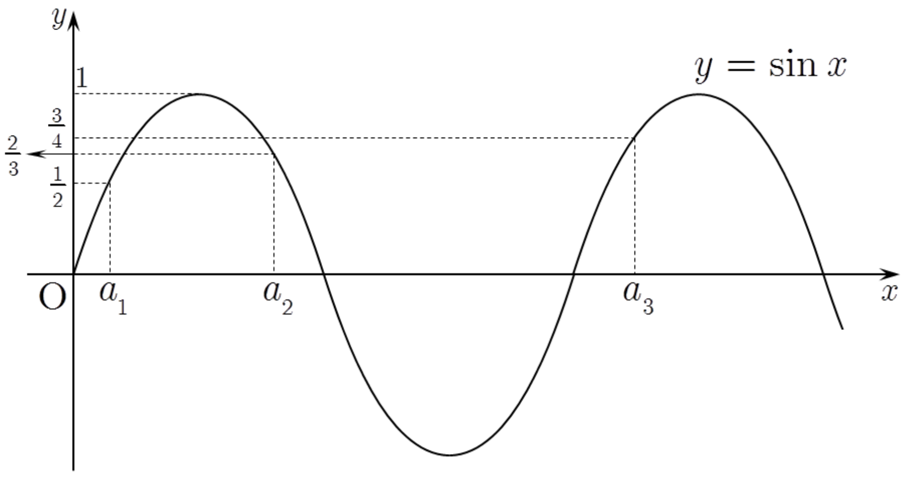
$$M=\left\{(a,\,b)\,\middle|\,0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\text{에서 } f(x)\text{의 최댓값은 } 5\text{이다.}\right\}$$

집합 M의 원소를 좌표평면에 점찍어 그려지는 곡선을 C라 하자. 곡선 C와 직선 $x+y=0$이 이루는 도형의 넓이를 구하시오. [4점]

① $25+\frac{25}{4}\pi$ ② $25+\frac{25}{2}\pi$ ③ $50-\frac{25}{4}\pi$
④ $50-\frac{25}{2}\pi$ ⑤ $100-25\pi$

15. 자연수 n에 대하여 직선 $y=\frac{n}{n+1}$과 함수 $y=\sin x$의 그래프가 제 1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

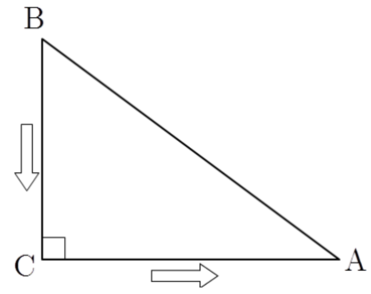
$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{n}$의 값은? [4점]



① 4π ② 2π ③ π

④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ $\frac{\pi}{4}$

16. $\angle\mathrm{ACB}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC가 넓이를 50으로 유지하며 변 BC의 길이가 감소하고 있다. 변 BC의 시간에 대한 길이의 변화율과 변 AC의 시간에 대한 길이의 변화율의 합이 0인 시점에서의 변 AB의 시간에 대한 길이의 변화율을 구하면? [4점]



① 10 ② 5 ③ -5

④ -10 ⑤ 0

17. 어느 도시에 있는 모든 고등학교 3학년 학생들을 대상으로 수학시험을 본 결과, 남학생들의 점수는 평균이 60점, 표준편차가 10점인 정규분포를 따르고, 여학생들의 점수는 평균이 65점, 표준편차가 15점인 정규분포를 따른다고 한다. 이 시험을 본 학생들 중 임의로 택한 한 학생의 점수가 80점 이상일 때, 이 학생이 여학생일 확률이 96%라고 할 때, 이 도시에 있는 고등학교 3학년 학생들의 남녀 성비를 구하면? [4점]

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.19
1	0.34
1.5	0.43
2	0.48
2.5	0.49

① 4 : 5　② 3 : 4　③ 3 : 5　④ 2 : 3　⑤ 1 : 3

18. 각 면에 1부터 6까지의 자연수가 적힌 정육면체가 1이 적힌 면이 바닥을 보며 놓여있다. 바닥에 붙어있는 정육면체의 네 변 중 하나를 골라 정육면체를 굴리는 시행을 n번 했을 때, 1이 적힌 면이 바닥을 보고 있을 확률을 p_n이라 하자. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|p_n-\frac{1}{6}\right|$의 값을 구하면? [4점]

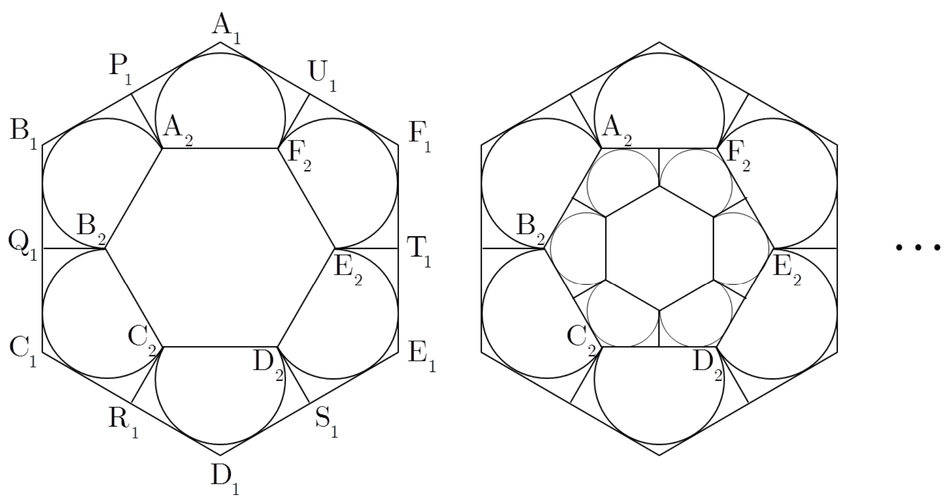
① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{2}{3}$

19. 일차변환 f에 대한 다음의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. 서로 다른 두 점 A, B와 원점 O에 대하여 $f(\mathrm{A})=\mathrm{O}$, $f(\mathrm{B})=\mathrm{O}$를 만족하는 f를 나타내는 행렬은 영행렬이다.
ㄴ. 원점을 지나지 않는 직선 l에 대하여 l 위의 모든 점이 f에 의하여 원점으로 이동하면 f를 나타내는 행렬은 영행렬이다.
ㄷ. 좌표평면에 놓인 삼각형 ABC에 대하여 세 점 $f(\mathrm{A})$, $f(\mathrm{B})$, $f(\mathrm{C})$가 삼각형을 이루면 f를 나타내는 행렬은 역행렬을 가진다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 한 변의 길이가 6인 정육각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}$의 각 변 $\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{B_1C_1}$, $\mathrm{C_1D_1}$, $\mathrm{D_1E_1}$, $\mathrm{E_1F_1}$, $\mathrm{F_1A_1}$의 중점을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{R_1}$, $\mathrm{S_1}$, $\mathrm{T_1}$, $\mathrm{U_1}$이라 하고 세 선분 $\mathrm{P_1S_1}$, $\mathrm{Q_1T_1}$, $\mathrm{R_1U_1}$이 만나는 점을 O라 하자. 정육각형 내부에 세 선분 $\mathrm{P_1S_1}$, $\mathrm{Q_1T_1}$, $\mathrm{R_1U_1}$에 의해 분할되는 6개의 사각형에 각각 내접하는 원을 그리고 이 6개의 원이 $\mathrm{OP_1}$, $\mathrm{OQ_1}$, $\mathrm{OR_1}$, $\mathrm{OS_1}$, $\mathrm{OT_1}$, $\mathrm{OU_1}$와 만나는 점을 각각 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{D_2}$, $\mathrm{E_2}$, $\mathrm{F_2}$라 하자. 정육각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2E_2F_2}$을 그리고 이 정육각형의 내부에 그려지는 모든 곡선과 직선을 지운 후 남은 도형을 K_1이라 하자.
각 변 $\mathrm{A_2B_2}$, $\mathrm{B_2C_2}$, $\mathrm{C_2D_2}$, $\mathrm{D_2E_2}$, $\mathrm{E_2F_2}$, $\mathrm{F_2A_2}$의 중점을 각각 $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{Q_2}$, $\mathrm{R_2}$, $\mathrm{S_2}$, $\mathrm{T_2}$, $\mathrm{U_2}$라 하고 세 선분 $\mathrm{P_2S_2}$, $\mathrm{Q_2T_2}$, $\mathrm{R_2U_2}$가 만나는 점을 O라 하자. 정육각형 내부에 세 선분 $\mathrm{P_2S_2}$, $\mathrm{Q_2T_2}$, $\mathrm{R_2U_2}$에 의해 분할되는 6개의 사각형에 각각 내접하는 원을 그리고 이 6개의 원이 $\mathrm{OP_2}$, $\mathrm{OQ_2}$, $\mathrm{OR_2}$, $\mathrm{OS_2}$, $\mathrm{OT_2}$, $\mathrm{OU_2}$와 만나는 점을 각각 $\mathrm{A_3}$, $\mathrm{B_3}$, $\mathrm{C_3}$, $\mathrm{D_3}$, $\mathrm{E_3}$, $\mathrm{F_3}$라 하자. 정육각형 $\mathrm{A_3B_3C_3D_3E_3F_3}$을 그리고 이 정육각형의 내부에 그려지는 모든 곡선과 직선을 지운 후 남은 도형을 K_2라 하자.
이와 같은 방법으로 도형 K_n을 만들어 갈 때, K_n에 그려진 원호 부분의 길이의 합을 l_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} l_n$의 값을 구하시오. [4점]



K_1 K_2

① $\dfrac{48\pi(6+\sqrt{3})}{11}$ ② $\dfrac{24\pi(6+\sqrt{3})}{11}$

③ $\dfrac{48\pi(3+\sqrt{6})}{11}$ ④ $\dfrac{48\pi(6+\sqrt{3})}{17}$

⑤ $\dfrac{24\pi(6+\sqrt{3})}{17}$

21. 실수전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)+f(10-x)$는 상수이다.
(나) 임의의 실수 x에 대하여 $f'(x)=f'(x+10)$
(다) $\lim_{n\to\infty}\int_{10n}^{10n+10}\{f(x)-x\}dx=30$

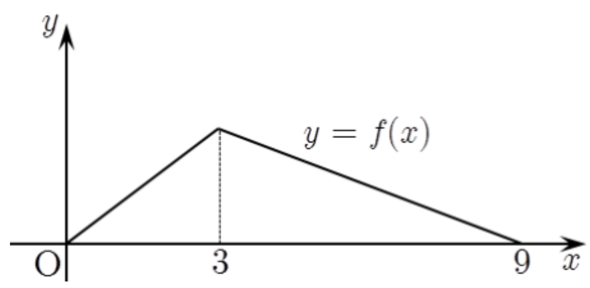
$\int_0^{10} xf'(x)dx$의 값은? [4점]

① 30 ② 40 ③ 50
④ 60 ⑤ 70

단 답 형

22. $\lim_{n\to\infty}2n\sin\frac{10}{n}$의 값을 구하면? [3점]

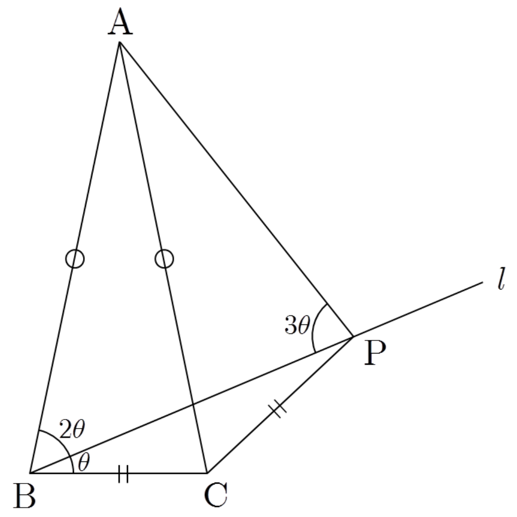
23. $0\leq x\leq 9$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같이 주어져 있을 때, $\mathrm{E}(X)$의 값을 구하면? [3점]



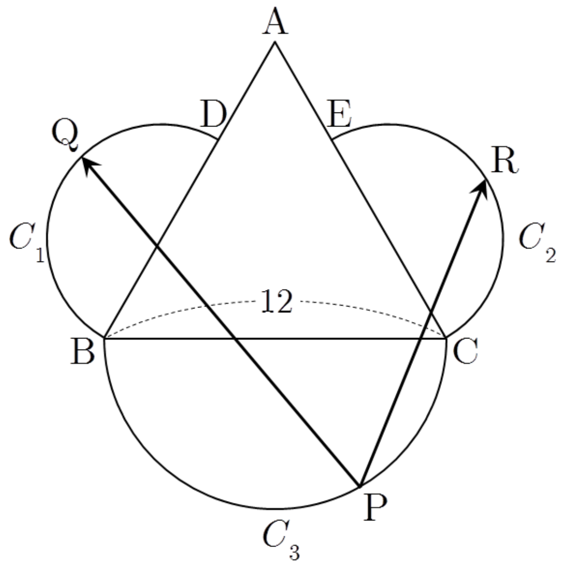
24. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$으로 표현되는 일차변환을 f라 하자. f에 의하여 쌍곡선 $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{15}=1$이 옮겨지는 쌍곡선을 C라 하면 쌍곡선 C가 타원 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{b^2}=1$과 두 초점을 공유한다. 이 때, b^2의 값을 구하면? [3점]

25. 각 자리 수의 합이 7인 n자리의 자연수의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{6} a_k$의 값은? [3점]

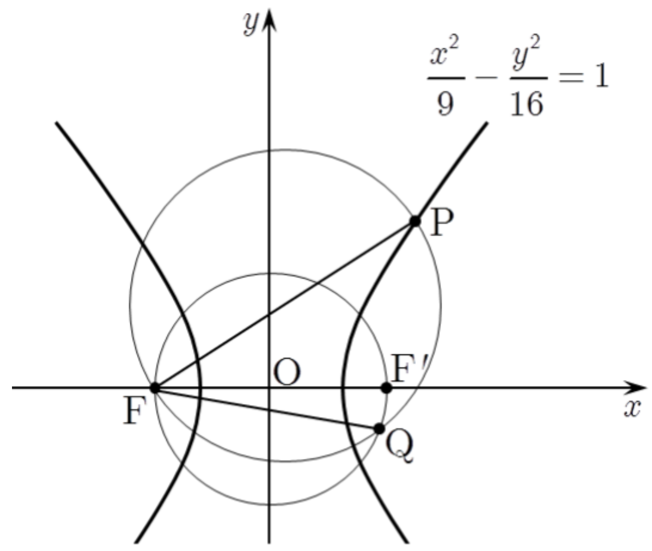
26. $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변 삼각형 $\triangle ABC$가 있다. 아래 그림과 같이 각도 $\angle ABC$를 $2:1$로 내분하는 반직선 l이 선분 AC와 교점을 가질 때, 반직선 l위의 점 P가 $\overline{BC}=\overline{PC}$를 만족한다. $\angle APB=3\angle PBC$일 때, $\angle PBC=\frac{q}{p}\pi$를 만족하는 서로소인 두 자연수 p, q에 대하여 p^2+q^2의 값을 구하시오. [4점]



27. 한 변의 길이가 12인 정삼각형 ABC가 있다. AB의 3등분점 중에서 A에 가까운 점을 D라 하고 AC의 3등분점 중에서 A에 가까운 점을 E라 하자. 세 선분 BD, CE, BC를 지름으로 가지는 반원을 각각 삼각형 ABC의 외부에 그리고 C_1, C_2, C_3라 하자. C_1 위의 점 Q, C_2 위의 점 R, C_3 위의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}|$의 최댓값이 $x+y\sqrt{3}$이라고 할 때, $x+y$의 값을 구하시오. (단, x, y는 유리수이다.) [4점]



28. 두 정점 F$(-5, 0)$, F$'(5, 0)$와 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 제 1사분면 부분에 속한 동점 P에 대하여 두 선분 PF, FF$'$를 지름으로 하는 두 원의 교점 중 F가 아닌 점을 Q라 하자. 이때, $\overline{\mathrm{FQ}}$의 최댓값을 구하시오. [4점]



29. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $g(x)=f(x)-[f(x)]$라 할 때, 함수 $g(x)$다음 조건을 만족시킨다.

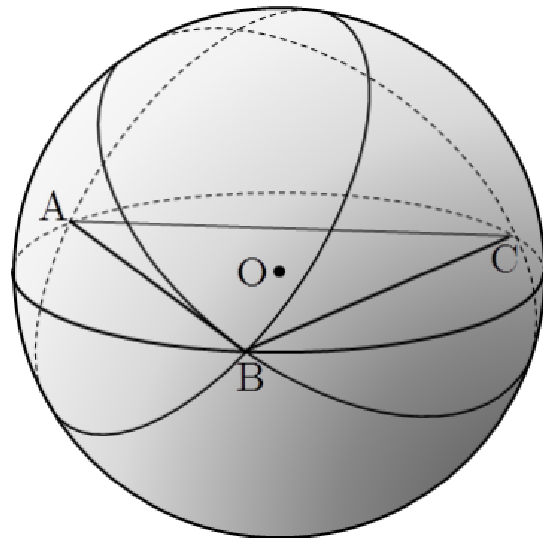
(가) $\lim_{x\to 1} g(x)$ 가 수렴한다.

(나) $\lim_{x\to 1} g(x) \neq g(1)$

(다) $\lim_{x\to 3} g(x)=0$

$\dfrac{f'(11)}{f'(5)}$의 값을 구하시오.(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

30. 점 O를 중심으로 가지는 구와 점 O를 지나는 평면 α가 있다. 구와 α가 만나서 이루는 원에 내접하는 정삼각형 ABC에 대하여 선분 AB를 포함하는 평면 β가 구와 만나서 이루는 원을 C_1이라 하자. 선분 BC를 포함하는 평면 γ가 원 C_1의 중심을 지날 때, α와 γ가 이루는 예각의 최대값 θ_{max}에 대하여 $\cos^2\theta_{max}=\dfrac{q}{p}$가 성립한다. 서로소인 두 자연수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오. [4점]



※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.