

기·출·의·파·급·효·과
수학1



수학1
기출의 파급효과

수학1

Chapter 1. 지수와 로그_11p

Chapter 2. 지수함수와 로그함수_67p

Chapter 3. 개수 세기_159p

Chapter 4. 삼각함수, 사인법칙, 코사인법칙_196p

Chapter 5. 수열_305p

Chapter 6. 수학적 귀납법과 낯선 수열_391p

저자의 말

안녕하세요. 오르비 파급효과입니다. 집필한 지 2년째네요. 제작년에 EBS 선별과 칼럼으로, 작년에는 기출의 파급효과 시리즈를 통해 큰 사랑을 받았습니다. 이까지 오는 데 너무 과분한 사랑을 주신 분들 너무 감사합니다. 이제 본격적으로 교재 소개를 해보겠습니다. 저는 다음과 같은 교재를 만들었습니다.

1. 수학1 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.

각 Chapter를 나누는 기준이 교과서 목차가 아닌 기출을 푸는데 정말 필요한 태도와 도구입니다. 기존 개념서들보다 훨씬 얇습니다. 빠르게 실전 개념을 정리할 수 있습니다. 예시해설까지 꼼꼼히 읽는다면 준킬러, 킬러 문제에서 생각의 틀이 확실히 잡힐 것입니다. 각 Chapter를 '순서대로' 학습하신다면 더욱 큰 학습효과를 기대할 수 있습니다.

2. 기출에 대한 태도와 도구들을 바로 활용할 수 있도록 준킬러 이상급의 기출들을 본문 속 예시로 들었습니다. 20학년도 수능 경향과 해당 기출까지 반영되어 있습니다.

수학1 기출 중 평가원 21, 30번은 물론 오답률이 높은 문제들을 예시로 들었습니다. 본문 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 더욱 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다.

예시로 든 들어주는 평가원 기출을 태도와 도구뿐만 아니라 진화 단계별로도 배치했습니다. 예시들을 '순서대로' 풀다보면 자연스럽게 기출의 진화과정을 느낄 수 있습니다. 기출의 진화과정을 느낀다면 자연스럽게 기출에 대한 태도와 도구들이 정리됩니다. 태도와 도구 정리가 완성되면 최종 진화 형태인 후반부의 최신 기출문제는 혼자 clear 할 수 있고 이에 대한 보람을 느끼실 겁니다.

예전 킬러 문제에 쓰였던 아이디어 2개 이상이 현재의 준킬러, 킬러에 쓰입니다. 수능 때 21번, 29번, 30번을 풀 생각이 없어 과거의 21번, 29번, 30번을 제대로 학습하지 않는 우를 범한다면 준킬러도 못 풀거나 빨리 풀기 힘듭니다. 따라서 태도와 도구를 기반으로 한 기출의 킬러 학습은 필수입니다.

3. 평가원 문항뿐만 아니라 교육청, 사관학교 문항도 중요한 기출들입니다.

최근 교육청 및 사관학교 문제가 진화한 형태가 평가원에 출제되고 있습니다. 19학년도 수능 29번의 경우 14학년도 사관학교 15번과 매우 유사하고 20학년도 6월 평가원 21번, 30번은 18년 10월 교육청 21번, 30번과 매우 유사합니다. 따라서 기존 평가원 기출만을 푸는 것만으로 현재 수능을 대비하기는 힘듭니다. 하지만 교육청 및 사관학교 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다.

이를 해결하기 위해 핵심적인 평가원, 교육청, 그리고 사관학교 문제를 필요한 만큼만 선별했습니다. 본문과 함께 있는 예시 문제들은 수학1 교재의 경우 대략 100문제 정도입니다. 예시에 있는 문제 수만으로 부족함을 느끼실 분들을 위해 예시보다는 다소 쉬운 유제들도 기출에 대한 태도와 도구를 체화하기 시키기 위해 충분히 넣었습니다. 수학1 교재의 경우 유제는 대략 150문제입니다. 본문 속 예시뿐만 아니라 유제들도 단순 단원별로 분리된 것이 아니라 기출에 대한 태도와 도구를 기준으로 분리되었습니다.

4. 칼럼 속 예시해설과 유제 해설은 문제를 푸는데에 있어 필요한 생각의 흐름을 매우 자세하게 담았습니다.

예시 해설과 유제 해설은 단계별로 분리되어 있어 가독성이 좋아 이해가 더욱 쉽습니다. 문제에서 필요한 태도와 도구들을 어떻게 쓰는지 과외처럼 매우 자세히 알려줍니다. 유제는 칼럼과 예시들을 잘 학습했다면 무리 없이 풀 수 있는 수준입니다.

하루에 예시를 포함한 Chapter 하나만 완료하고 유제 15문제만 푸세요! 이를 실천하면 수학1 교재를 모두 끝내는 데에 2주가 걸립니다. 이 교재를 최소 2번 이상 볼 수 있습니다.

수학 가형 4등급 초반이 1등급 컷 이상 받는 데 1달에서 2달 사이로 걸립니다.
약 파는 것 아닙니다. 과장된 광고를 극히 싫어하는 편입니다.

저도 18학년도 6월 평가원 때 3등급 받고 여름방학 때 이 책의 내용대로 기출을 학습하고 18학년도 9월 평가원, 18학년도 수능 1등급을 가볍게 받아냈습니다.

제 과외 학생은 19학년도 6월 평가원 때 4등급에 가까운 3등급이었으나 이 방법대로 1달간 기출을 학습하고 19학년도 수능 96점을 받아내었습니다.

수학 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 마지막으로 한 번쯤 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

기출의 파급효과	EBS 선별	기대 모의고사
기출에 대한 일관적인 도구와 태도를 지향하는 교재입니다. 도구와 태도 체화를 위해 준킬러 이상의 기출을 주로 다루며, 고득점에 필요한 도구와 태도의 빠른 체화를 돕는 교재입니다.	최근 3년간 수학영역에서의 EBS의 위상은 어느 때보다 높아졌습니다. EBS 전문항 1회독은 준필수이며, 변형이 예상되거나 교훈이 많은 문제들은 파급효과와 기대가 제작하는 EBS 선별집을 참고하여 다독하시면 좋습니다.	기대 모의고사는 철저하게 최근 수능과 당해 평가원의 출제 기조에 기반한 경향성에 중점을 둔 교재입니다. 당해 평가원의 출제경향과 EBS 변형 Point를 예측하여 최고의 실전감을 선물합니다.
<ul style="list-style-type: none"> - 수학 1 - 수학 2 (상) (하) - 미적분 (상) (하) - 확률과 통계 	<ul style="list-style-type: none"> - EBS 선별집 (9월 중순) - EBS FINAL 선별집 (11월 중순) 	<ul style="list-style-type: none"> - 가형 (7월 출판 예정) - 나형 (7월 출판 예정)

◆ 수열

◆ 1. 기본 개념

수열의 정의 : 차례로 나열된 수의 열

항 : 수열에서 나열된 각각의 수

일반항 : 수열 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 에서 n 번째 항 a_n 을 수열의 일반항이라 한다.

표현 : 일반항이 a_n 인 수열은 $\{a_n\}$ 으로 나타낸다.

◆ 2. 수열과 함수의 관계

수열의 기본적 정의는 차례로 나열된 수의 열이긴 하지만,
 함수를 이용한다면 수열은 자연수 전체의 집합 N 을 정의역으로 갖는 함수 $f(n)$ 으로 볼 수 있고,
 자연수 n 에 대응하는 함수값 $f(n)$ 이 a_n (수열의 일반항)이 된다.

예를 들어 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 와 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_n = f(n)$ 이면,
 수열 $\{a_n\}$ 의 각 항은 함수 $y = f(x)$ 의 정의역을 자연수의 집합으로 제한했을 때의 치역과 같다.

이처럼 우리가 익숙하게 알고 있는 실수 전체의 집합에서 정의된 함수들도 정의역을 ‘자연수의 집합’으로 한정하기만 한다면 함수값들을 수열로 볼 수 있고, 관련 기출 문제도 많다.

유리함수 $f(x) = \frac{8x}{2x-15}$ 와 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_n = f(n)$ 이다. (16년 3월 교육청 나형 30번)

$f(x) = \log_4 x$ 일 때, 수열 $\{f(2^n)\}$ 은 등차수열이다. (05학년도 6월 평가원 나형 24번 (L) 선지)

수열을 함수로 해석한다면 수열에 대한 유연한 관점을 가질 수 있다는 점에서 굉장히 유용하다. 등차, 등비수열, 수열의 합에서도 수열의 함수적 의미가 매우 중요하므로 앞으로는 계속해서 수열과 함수를 연결지어 사고하자.

◇ 등차수열

◇ 1. 등차수열의 정의, 판별, 함수와의 관계

(1) 정의

첫째항부터 차례로 일정한 수를 더해 만들어지는 수열을 등차수열이라 한다.

등차수열에서 더하는 일정한 수 또는 연속인 두 항의 차를 공차라고 하고, 일반적으로 d 로 표현한다.

첫째항이 a 이고 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은 다음과 같다.

$$a_n = a + (n-1)d \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

이때, 첫째항이 a 이고 공차가 d 인 등차수열의 귀납적 정의는 다음과 같다. (수열의 귀납적 정의는 수열을 위와 같은 일반항이 아닌 ‘처음의 몇 개의 항과 이웃하는 항의 관계식’을 통해 정의하는 것을 말한다. <Chapter 6>에서 자세히 배운다.)

$$a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{혹은} \quad a_1 = a, a_{n+1} - a_n = d \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

오른쪽 식은 왼쪽 식에서 a_n 을 이항한 것뿐이지만, 실제 문제에서 만났을 때 헷갈리는 경우가 종종 있으므로 두 형태 모두 알아두자.

혹은 다음과 같이 등차중항을 이용해서 등차수열을 귀납적으로 정의할 수도 있다.

$$a_1 = a, a_2 = a + d, a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{혹은} \\ a_1 = a, a_2 = a + d, a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

※ $\{a_n\}$ 이 등차수열이라면 ‘ $\{a_n\}$ 의 서로 다른 두 항의 값’ 또는 ‘ $\{a_n\}$ 의 하나의 항의 값과 공차’만 안다면 일반항 a_n 을 구할 수 있다. 등차수열의 일반항은 미지수 a, d 를 포함하고 있으므로 일반항을 완전히 알아 내려면 서로 다른 두 개의 정보가 필요한 것이다.

태도: 서로 다른 n 개의 미지수의 값을 알아내려면 적어도 서로 다른 n 개의 정보가 필요하다.

(2) 등차수열 판별 (다항식으로 보는 등차수열)

첫째항이 a 이고 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 $a_n = a + (n-1)d$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)에서 a_n 을 n 에 관해 정리하면 $a_n = dn + a - d$ 이다.

이때

$d = 0$ 이면 a_n 은 상수이고,

$d \neq 0$ 이면 a_n 은 n 에 관한 일차식이다.

특히 n 의 계수가 $\{a_n\}$ 의 공차라는 점이 중요하다.

어떤 수열 $\{b_n\}$ 이 등차수열인지 판별하고 싶다면 해당 식이 상수 또는 n 에 관한 일차식에 해당하는지 관찰하면 된다. 둘 중 어느 것에도 해당하지 않는다면 수열 $\{b_n\}$ 은 등차수열이 아니다. 일반항이 상수인 수열도 등차수열임을 주의하자.

(3) 등차수열과 함수의 관계

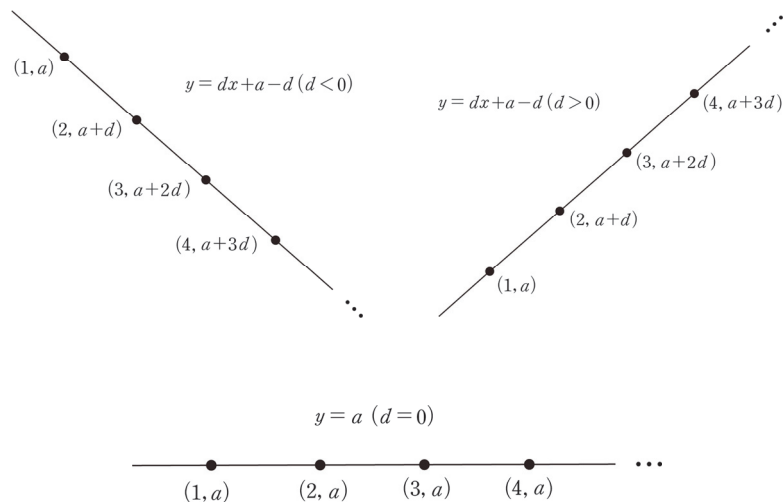
첫째항이 a 이고 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 $a_n = a + (n-1)d$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)에서 a_n 을 n 에 관해 정리하면 $a_n = dn + a - d$ 이다.

이때, $f(x) = dx + a - d$ 에 대하여 $a_n = f(n)$ 이라 하면

등차수열 $\{a_n\}$ 의 항은 직선 $y = dx + a - d$ 위의 x 좌표가 자연수인 점들의 y 좌표와 같다.

이때, 직선 $y = dx + a - d$ 의 기울기 d 는 $\{a_n\}$ 의 공차와 같다는 점이 포인트다.

d 의 부호에 따라 직선 $y = dx + a - d$ 위의 x 좌표가 자연수인 점들을 관찰하면 쉽게 이해할 수 있다.



아래 예제는 수학II 내용이 주를 이루지만, 등차수열과 관련하여 중요한 포인트를 담고 있다.

예제(1) 20학년도 9월 평가원 나형 30번

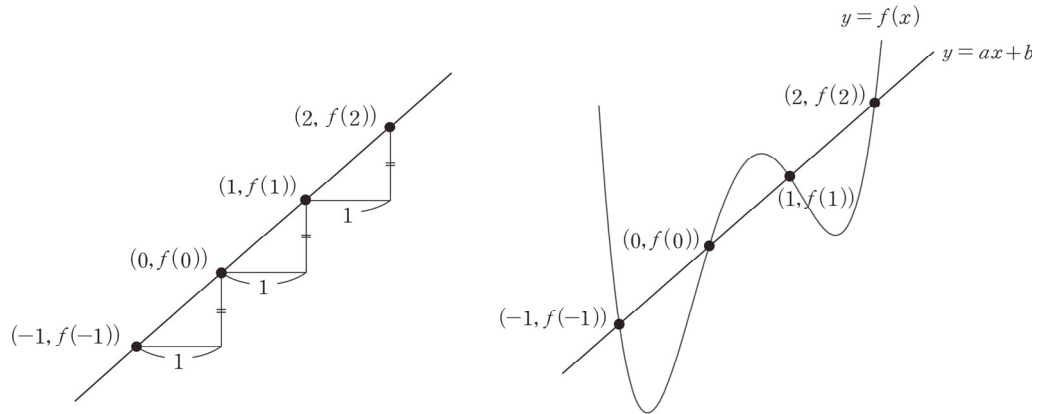
최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 네 개의 수 $f(-1), f(0), f(1), f(2)$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$ 에서의 접선과 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선이 점 $(k, 0)$ 에서 만난다. $f(2k) = 20$ 일 때, $f(4k)$ 의 값을 구하시오. (단, k 는 상수이다.) [4점]



1. 순서대로 등차수열을 이루는 네 개의 수 $f(-1), f(0), f(1), f(2)$ 의 x 좌표 $-1, 0, 1, 2$ 또한 이 순서대로 등차수열을 이루므로

네 점 $(-1, f(-1)), (0, f(0)), (1, f(1)), (2, f(2))$ 는 모두 한 직선 위에 존재한다.

그림으로 이해해도 좋고, 수식으로 이해해도 좋다. $f(0) - f(-1) = f(1) - f(0) = f(2) - f(1)$ 에 의하여 $\frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$ 이다.



네 점 $(-1, f(-1)), (0, f(0)), (1, f(1)), (2, f(2))$ 을 모두 지나가는 직선 l 의 방정식을 $y = ax + b$ (단, a, b 는 상수)라 하자.

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 는 서로 다른 네 점 $(-1, f(-1)), (0, f(0)), (1, f(1)), (2, f(2))$ 에서 만나므로 **차이함수**를 이용하면 $f(x) - (ax + b) = x(x+1)(x-1)(x-2)$ 이다.

2. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$ 에서의 접선과 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선이 점 $(k, 0)$ 에서 만난다. 그래프 특성을 이용하고 싶지만 그래프 특성으로 해결하기는 어려워 보인다. **정직하게 두 접선의 방정식을 구한 다음 $(k, 0)$ 을 대입하자.** (무작정 조건을 식으로 표현하기보다 그래프 특성을 이용하려는 시도 자체가 중요하다.)

$$f(x) - (ax + b) = x(x+1)(x-1)(x-2) \text{에서 } f(-1) = -a + b, f(2) = 2a + b$$

$$f'(x) - a = (x+1)(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2) + x(x+1)(x-2) + x(x+1)(x-1) \text{에서}$$

$$f'(-1) = a - 6, f'(2) = a + 6$$

※ 해설을 위해 $f(x) - (ax + b) = x(x+1)(x-1)(x-2)$ 의 양변을 x 에 대하여 일일이 미분했지만, 실전에서는 곱의 미분의 특성을 바로 이용하면 된다.

$$f'(x) - a = (x+1)(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2) + x(x+1)(x-2) + x(x+1)(x-1)$$

에 $x = -1$ 을 대입하면 $(x+1)$ 을 인수로 갖는 항은 모두 사라지므로 $x(x-1)(x-2)$ 에만 $x = -1$ 을 대입하면 된다.

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$ 에서의 접선의 방정식 : $y = (a-6)(x+1) - a + b$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의 방정식 : $y = (a+6)(x-2) + 2a + b$

두 접선이 모두 점 $(k, 0)$ 을 지나므로

$$0 = (a-6)(k+1) - a + b, 0 = ak - 6k - 6 + b, 6(k+1) = ak + b \cdots \textcircled{A}$$

$$0 = (a+6)(k-2) + 2a + b, 0 = ak + 6k - 12 + b, 6(-k+2) = ak + b \cdots \textcircled{B}$$

$$6(k+1) = 6(-k+2) \text{이므로}$$

$$6k + 6 = -6k + 12, 12k = 6 \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

3. a, b 의 값을 구하려면 한 가지 조건이 더 필요하다. $f(2k) = 20$ 을 이용하자.

$f(2k) = f(1) = 20$ 이므로 $f(x) - (ax + b) = x(x+1)(x-1)(x-2)$ 에서
 $f(1) = a + b = 20$

$$\textcircled{A} \text{에 } k = \frac{1}{2} \text{을 대입하면 } 9 = \frac{1}{2}a + b$$

$$a + b = 20 \text{와 } 9 = \frac{1}{2}a + b \text{를 연립하면 } a = 22, b = -2$$

따라서 $f(x) = x(x+1)(x-1)(x-2) + 22x - 2$ 이므로 $f(4k) = f(2) = 22 \times 2 - 2 = 42$

답은 42!!

comment

등차수열과 직선을 연관 짓는 아이디어가 있다면 30번 문항치고는 무난한 문항이지만 사전에 등차수열과 직선을 연결지을 수 있다는 점을 배우지 않은 학생들은 실전에서 이를 생각하기 어려울 수 있다.

평가원은 발상적인 풀이가 유일한 풀이가 되도록 문제를 설계하지 않는다.

(등차수열과 직선을 연결짓는 게 발상이라는 것은 논쟁의 여지가 있다. 알아두긴 해야 한다.)

이 문항도 다른 방법으로 풀 수 있는데, 어떤 방법일지 고민해보고 다음 페이지를 보자.



〈네 점을 지나가는 직선을 떠올리지 못했을 때의 풀이〉

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 네 개의 수 $f(-1), f(0), f(1), f(2)$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룬다는 것에서 그래프 특징을 발견하기는 어렵다. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 의 일반식을 작성하여 $f(-1), f(0), f(1), f(2)$ 의 값을 일일이 식으로 나타내자.

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 의 일반식을 작성하면,

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (\text{단, } a, b, c, d \text{는 상수})$$

$$f(-1) = 1 - a + b - c + d$$

$$f(0) = d$$

$$f(1) = 1 + a + b + c + d$$

$$f(2) = 16 + 8a + 4b + 2c + d$$

네 개의 값이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $f(0) - f(-1) = f(1) - f(0) = f(2) - f(1)$

$$-1 + a - b + c = 1 + a + b + c = 15 + 7a + 3b + c \quad \text{모든 변에서 } c \text{를 빼면,}$$

$$-1 + a - b = 1 + a + b = 15 + 7a + 3b$$

$$-1 + a - b = 1 + a + b \text{에서 } 2b = -2 \quad \therefore b = -1$$

$$1 + a + b = 15 + 7a + 3b \text{에 } b = -1 \text{을 대입하면 } a = 12 + 7a, 6a = -12 \quad \therefore a = -2$$

$$c \text{를 구할 수는 없으므로 } f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + cx + d$$

본 해설에서는 등차수열과 직선의 관계에 착안하여

$$f(x) - (ax + b) = x(x+1)(x-1)(x-2) \text{을 얻었고,}$$

여기서는 사차함수의 일반식 설정, 대입으로 $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + cx + d$ 을 얻었다.

두 식 모두 2개의 미지수를 가지므로 이후의 풀이는 같다. 두 풀이 모두 알아두자.

◇ 2. 등차중항

세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b 를 a 와 c 의 등차중항이라고 한다.

b 가 a, c 의 등차중항이면 $b - a = c - b = (\text{공차})$ 이므로 $2b = a + c$, $b = \frac{a+c}{2}$ 가 성립한다.

이때, $\frac{a+c}{2}$ 는 a 와 c 의 평균이므로 **b 를 a, c 의 평균으로 해석하자.**

등차수열의 가장 중요한 특징은 등차중항이다. 등차수열의 일반항이 간단하다는 이유로 등차수열 문제를 볼 때마다 일반항부터 작성하여 문제 속 조건을 대입하여 푸는 학생들이 많은데 이제부터는 그 습관을 버리자.

등차중항을 이용하면 계산이 수월해지므로 등차수열 문제를 본다면 일반항이 아닌 등차중항부터 생각해야 한다.

등차중항으로 문제를 풀기 어려운 경우에만 일반항을 작성하면 된다.

등차중항과 관련된 팁을 주자면, **순서대로 등차수열을 이루는 세 개의 수**는 $a, a+d, a+2d$ 로 표현하기보다 $a-d, a, a+d$ 로 표현하자. 이 경우 세 수의 합은 $3a$ 가 된다.

순서대로 등차수열을 이루는 네 개의 수는 $a-3k, a-k, a+k, a+3k$ 로 표현하자. 이 경우 네 수의 합은 $4a$ 가 된다. 등차수열에서는 이처럼 중심을 먼저 고려하는 습관이 중요하다.

※ 등차수열에서 합(혹은 평균)이 같은 쌍들

등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \dots$

자연수 p, q 에 대해 등차수열 $\{a_n\}$ 의 항 a_p 와 a_q 가 있을 때,

$p+q$ 의 값이 같은 (a_p, a_q) 쌍에 대해 $a_p + a_q$ 의 값(혹은 a_p 와 a_q 의 평균)은 일정하다.

첫째항이 a 이고, 공차가 d 인 등차수열의 일반항을 이용하여 바로 증명할 수 있다.

$$a_p = a + (p-1)d, \quad a_q = a + (q-1)d \text{이므로 } a_p + a_q = 2a + (p+q-2)d$$

이때, a, d 는 상수이므로 $p+q$ 가 상수라면 $a_p + a_q$ 의 값은 상수가 된다.

등차수열에서 ‘합이 같은 쌍’은 ‘등차중항’과 더불어 등차수열 문제에서 계산을 줄일 수 있는 강력한 도구이므로 반드시 숙지하자. 이 도구를 이용하면 다음과 같은 문제의 답을 빠르게 구할 수 있다.

예시 12년 3월 교육청 나형 22번

등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 4$, $a_2 + a_3 = 17$ 일 때, a_4 의 값을 구하시오. [3점]

→ $a_2 + a_3 = a_1 + a_4$ 이므로 $17 = 4 + a_4$, $a_4 = 13$ 이다. 답은 13!!

◇ 3. 등차수열의 합

(1) 등차수열의 합의 원리

등차수열의 합 공식을 모르는 학생은 거의 없을 것이다.

첫째항이 a , 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은 다음과 같다.

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$$

첫째항이 a , 제 n 항이 l 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은 다음과 같다.

$$S_n = \frac{n(a+l)}{2}$$

그러나 이를 제대로 이해하고 있는 학생은 많지 않다. 대부분 두 개의 등차수열의 합 공식을 독립적인 공식으로 인식하고, 등차수열의 합을 구할 때 둘 중 하나의 공식에 값을 대입하는 식으로 문제를 푸는데 이러면 수능 수학이 추구하는 자유로운 사고로부터 멀어진다.

이제부터 등차수열의 합은 다음의 공식으로 이해하자.

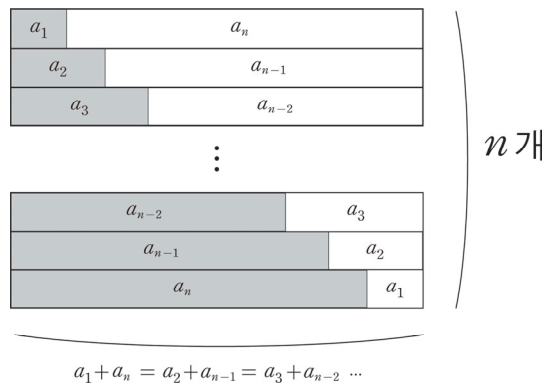
$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(a_2 + a_{n-1})}{2} = \frac{n(a_3 + a_{n-2})}{2} = \dots$$

가장 기본이 되는 형태는 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ 이고, (첫째항과 끝항의 평균) \times (항의 개수)로 이해하면 된다.

$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} = \frac{n\{a + a + (n-1)d\}}{2} = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ 이므로 $S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$ 도 독립적으로 외우는 것이 아니라 이러한 관점에서 자연스럽게 이해할 수 있어야 한다.

이전 페이지에서 알아봤듯이 $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \dots$ 이므로

$\frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(a_2 + a_{n-1})}{2} = \frac{n(a_3 + a_{n-2})}{2} = \dots$ 이다. 아래의 그림과 함께 이해하자.



따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 a_1 부터 a_n 까지의 합을 구할 때, **문제 상황에 따라 주어진 수열에서 $(a_1, a_n), (a_2, a_{n-1}), (a_3, a_{n-2}), \dots$ 중 아무 쌍이나 하나를 선택해서 합을 구하면 된다.**

단순히 등차수열의 합 공식을 외운 학생과, 등차수열의 합 공식의 원리를 이해한 학생은 풀이 속도에서 유의미한 차이를 가져온다. 등차수열의 합의 원리를 이해했다면 다음의 문제들은 손쉽게 답을 구해야 한다.

예시(1) 15학년도 9월 평가원 A형 24번

등차수열 a_n 에 대하여 $a_1 + a_{10} = 22$ 일 때 $\sum_{k=2}^9 a_k$ 의 값을 구하시오. [3점]



$$\sum_{k=2}^9 a_k = \frac{8(a_2 + a_9)}{2} = \frac{8(a_1 + a_{10})}{2} = 4 \times 22 = 88 \text{이다. 답은 } 88!!$$

예시(2) 11학년도 6월 평가원 나형 6번

1과 2사이에 n 개의 수를 넣어 만든 등차수열

$$1, a_1, a_2, \dots, a_n, 2$$

의 합이 24일 때, n 의 값은? [3점]

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15



첫째항은 1, 끝항은 2, 항의 개수는 $n + 2$ 이므로 $\frac{3(n+2)}{2} = 24, n + 2 = 16, n = 14$ 이다. **답은 ④!!**

예제(3) 20년 3월 교육청 나형 17번

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $a_3 = 42$ 일 때, 다음 조건을 만족시키는 4 이상의 자연수 k 의 값은? [4점]

(가) $a_{k-3} + a_{k-1} = -24$

(나) $S_k = k^2$

① 13

② 14

③ 15

④ 16

⑤ 17



1. 등차수열의 일반항 $a + (n-1)d$ 는 두 개의 미지수 a, d 를 포함하고, 문제 속에서 새로운 미지수 k 가 등장했다. 즉, 미지수는 3개다.

이때, 세 개의 미지수 a, d, k 에 관한 서로 다른 세 개의 식 $a_3 = 42, a_{k-3} + a_{k-1} = -24, S_k = k^2$ 이 있으므로 일반항에 적절히 숫자를 대입한 다음 세 개의 식을 연립하면 a, d, k 의 값을 모두 구할 수 있다.

그러나 이러한 풀이는 계산이 상당히 복잡하고, 누가 봐도 출제 의도와는 거리가 먼 풀이이다. 등차수열의 합에서 배운 도구를 활용하자.

$$2. S_k = \frac{k(a_1 + a_k)}{2} = \frac{k(a_2 + a_{k-1})}{2} = \frac{k(a_3 + a_{k-2})}{2} = \frac{k(a_4 + a_{k-3})}{2} = \dots = k^2$$

문제에서 주어진 항은 $a_3 = 42$ 이므로 $S_k = \frac{k(a_3 + a_{k-2})}{2} = k^2$ 을 이용하자.

이때, 출제자에 감탄해야 한다. (가)에서 $a_{k-3} + a_{k-1} = -24$ 이므로 등차중항에 의하여

$$\frac{a_{k-3} + a_{k-1}}{2} = a_{k-2} = -12$$

$a_3 = 42, a_{k-2} = -12$ 를 $\frac{k(a_3 + a_{k-2})}{2} = k^2$ 에 대입하자.

$$\frac{k(a_3 + a_{k-2})}{2} = \frac{k(42 - 12)}{2} = k^2$$

$15k = k^2$ 에서 양변을 k 로 나누면 ($\because k \geq 4$)

$$15 = k$$

답은 ③!!

comment

정말 잘 만든 문항이다. ‘등차수열의 합의 원리를 생각하고 접근하는 학생’과 ‘아무 생각 없이 일반항을 작성한 뒤 대입, 계산으로 접근하는 학생’ 사이에 엄청난 풀이 시간의 차이를 만들어내기 때문이다.

지금까지 배운 내용을 바탕으로 준킬러 문항을 하나 풀어보자.

예제(3) 20학년도 사관 나형 29번

수열 $\{a_n\}$ 은 a_1 이 자연수이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - d & (a_n \geq 0) \\ a_n + d & (a_n < 0) \end{cases} \quad (d \text{는 자연수})$$

이다. $a_n < 0$ 인 자연수 n 의 최솟값을 m 이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{m-2} + a_{m-1} + a_m = 3$

(나) $a_1 + a_{m-1} = -9(a_m + a_{m+1})$

(다) $\sum_{k=1}^{m-1} a_k = 45$

a_1 의 값을 구하시오. (단, $m \geq 3$) [4점]



1. 수열 $\{a_n\}$ 은 양수인 항에 대해 d 만큼 빼고, 음수인 항에 대해 d 만큼 더하는 수열이다.

이때, $a_n < 0$ 인 자연수 n 의 최솟값이 m 이므로 a_m 이 처음으로 음수가 되는 항이다.

즉, 수열 $\{a_n\}$ 의 정의에 의해 m 개의 항으로 구성된 수열 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{m-1}, a_m$ 은 공차가 첫째항이 a_1 이고 공차가 $-d$ 인 등차수열이다.

2. 박스 안 조건을 따져보자. 우선 (가)에서 $a_{m-2} + a_{m-1} + a_m = 3$ 이고, a_{m-1} 은 a_{m-2} 와 a_m 의 등차중항이므로 $a_{m-1} = 1$ 이다.

다음으로 (나)에서 $a_1 + a_{m-1} = -9(a_m + a_{m+1})$ 이고, (다)에서 $\sum_{k=1}^{m-1} a_k = 45$ 이다.

$$\sum_{k=1}^{m-1} a_k = \frac{(m-1)(a_1 + a_{m-1})}{2} = 45 \text{ 이므로 } a_1 + a_{m-1} = \frac{90}{m-1} \text{ 이다.}$$

$$a_1 + a_{m-1} = \frac{90}{m-1} \text{ 을 } a_1 + a_{m-1} = -9(a_m + a_{m+1}) \text{ 에 대입하면 } \frac{90}{m-1} = -9(a_m + a_{m+1})$$

$$a_m = a_{m-1} - d = 1 - d$$

$$a_{m+1} = a_m + d = 1 (\because a_m < 0) \text{ 이므로}$$

$$\frac{90}{m-1} = -9(1-d+1)$$

$$-10 = (m-1)(2-d)$$

$$\therefore (m-1)(d-2) = 10$$

3. $(m-1)(d-2) = 10$ 을 만족시키는 m, d 의 값을 구하려면 한 가지 식이 더 필요하다.

$$a_1 + a_{m-1} = \frac{90}{m-1} \text{ 를 마저 이용하자.}$$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{m-1}, a_m$ 은 첫째항이 a_1 , 공차가 $-d$ 인 등차수열이고 $a_{m-1} = 1$ 이다.

즉, $a_{m-1} = a_1 - (m-2)d = 1$ 이므로 $a_1 = 1 + (m-2)d$ 이다.

$$\text{따라서 } a_1 + a_{m-1} = \frac{90}{m-1} \text{ 에서}$$

$$\{1 + (m-2)d\} + 1 = -9\{(1-d) + 1\}$$

$$2 + (m-2)d = -9(2-d)$$

$$(m-11)d = -20$$

$$\therefore d = \frac{20}{11-m}$$

4. $d = \frac{20}{11-m}$ 를 $(m-1)(d-2) = 10$ 에 대입하여 m, d 의 값을 구하자.

$$(m-1)\left(\frac{20}{11-m}-2\right)=10$$

$$(m-1)\{20-2(11-m)\}=10(11-m)$$

$$(m-1)(m-1)=5(11-m)$$

$$m^2-2m+1=55-5m$$

$$m^2+3m-54=0$$

$$(m-6)(m+9)=0$$

$$\therefore m=6 \text{ 또는 } m=-9$$

$$m \text{은 자연수이므로 } m=6, d=\frac{20}{11-6}=4$$

따라서 $a_1 = 1 + (m-2)d = 1 + (6-2)4 = 17$ 이다. **답은 17!!**

comment

1. 수열 $\{a_n\}$ 이 어떤 수열인지 파악한 다음, a_1 부터 a_m 까지는 공차가 $-d$ 인 등차수열임을 파악한다.
2. 등차중항을 이용하여 a_{m-1} 의 값을 구한다.
3. 미지수의 개수는 m, d 두 개이므로 (나) 식과 (다) 식을 연립하여 m, d 의 값을 구한다. 이때, 해설처럼

$$\sum_{k=1}^{m-1} a_k = \frac{(m-1)(a_1 + a_{m-1})}{2} = 45 \text{을 이용하면 계산이 비교적 간단해진다.}$$

(2) 등차중항으로 구하는 등차수열의 합

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$ 의 값은 $\frac{5(a_3 + a_7)}{2} = \frac{5(a_4 + a_6)}{2}$ 이다.

이때, ' a_3 과 a_7 의 등차중항'과 ' a_4 와 a_6 의 등차중항'은 모두 a_5 이므로 $\frac{a_3 + a_7}{2} = \frac{a_4 + a_6}{2} = a_5$ 이다.

즉, $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 5a_5$ 이다. 이제부터는 중간과정을 모두 생략하고 $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$ 을 보자마자 $5a_5$ 를 말할 수 있도록 연습하자.

- ① $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$ 의 값은 얼마인가? $5a_5$ 이다.
- ② $a_1 + a_2 + a_3$ 의 값은 얼마인가? $3a_2$ 이다.
- ③ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 의 값은 얼마인가? a_2 와 a_3 의 등차중항이 존재하지 않으므로 $\frac{4(a_1 + a_4)}{2}$ 또는 $\frac{4(a_2 + a_3)}{2}$ 으로 나타내는 수밖에 없다.
- ④ $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 의 값은 얼마인가? a_3 과 a_5 의 등차중항이 a_4 이므로 $4a_4$ 이다.

다시 말하지만 등차수열에서 가장 중요한 것은 등차중항이고, 등차수열의 합을 구할 때도 등차중항을 통해 사고하는 것이 유용하다.

(3) $\sum_{k=p}^q a_k + dn(q-p+1) = \sum_{k=p+n}^{q+n} a_k$ (단, p, q 는 $q > p$ 인 자연수이고 $\{a_n\}$ 은 공차가 d 인 등차수열)

공식을 외우려 하지 말고 이해하자. $a_p + a_{p+1} + \dots + a_q$ 가 $a_{p+n} + a_{p+n+1} + \dots + a_{q+n}$ 이 되기 위한 조건을 생각하면 자연스럽게 이해할 수 있다.

$$\begin{aligned} a_p + dn &= a_{p+n} \\ a_{p+1} + dn &= a_{p+n+1} \\ &\vdots \\ a_q + dn &= a_{q+n} \text{이므로} \\ a_p + a_{p+1} + \dots + a_q + \{dn \times (q-p+1)\} &= a_{p+n} + a_{p+n+1} + \dots + a_{q+n} \text{이다.} \end{aligned}$$

시그마를 이용하여 예쁘게 정리하면 $\sum_{k=p}^q a_k + dn(p-q+1) = \sum_{k=p+n}^{q+n} a_k$ 이다.

앞으로 두 등차수열의 합이 있을 때 $\sum_{k=p}^q a_k + dn(p-q+1) = \sum_{k=p+n}^{q+n} a_k$ 성질을 이용할 수 있는지 확인하자.

(4) 다항식으로 이해하는 등차수열의 합

첫째항이 a 이고 공차가 d 인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 S_n 을 n 에 관해 정리하면 다음과 같다.

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} = \frac{dn^2 + (2a-d)n}{2} = \frac{d}{2}n^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right)n$$

즉, S_n 은 상수항이 0인 n 에 관한 이차식이다. 이를 인수의 관점으로 해석하면 S_n 은 n 을 인수로 가진다.

이 점을 바탕으로 등차수열의 합에 관한 기출 문제를 풀어보자.

예제(4) 09학년도 6월 평가원 나형 16번

공차가 d_1, d_2 인 두 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 각각 S_n, T_n 이라 하자.

$$S_n T_n = n^2(n^2 - 1)$$

일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a_n = n$ 이면 $b_n = 4n - 4$ 이다.

ㄴ. $d_1 d_2 = 4$

ㄷ. $a_1 \neq 0$ 이면 $a_n = n$ 이다.

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



1. $a_n = n$ 이므로 $S_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ 이다. (혹은 첫째항이 1이고 공차가 1인 등차수열의 합을 구하면 된다.)

$$S_n T_n = n^2(n^2 - 1) \text{이므로 } T_n = 2n(n-1) \text{이다.}$$

① 선지 (ㄱ)에서 $b_n = 4n - 4$ 이라 했으므로 $\sum_{k=1}^n (4k - 4) = 2n(n-1)$ 이 성립하는지 확인해도 좋고,

② 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 $T_1 = b_1 = 0$, $T_n - T_{n-1} = b_n (n \geq 2)$ 을 구해도 좋다.

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n (4k - 4) = 4 \sum_{k=1}^n k - 4n = 4 \times \frac{n(n+1)}{2} - 4n = 2n(n-1)$$

$$\textcircled{2} b_n = T_n - T_{n-1} = 2n(n-1) - 2(n-1)(n-2) = 2(n-1)\{n - (n-2)\} = 4n - 4 (n \geq 2)$$

이때, $4 \times 1 - 4 = 0$ 이므로 $b_n = 4n - 4 (n \geq 1)$ (O)

2. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항을 각각 a , b 라 할 때 S_n , T_n 은 다음과 같다.

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d_1\}}{2}, T_n = \frac{n\{2b + (n-1)d_2\}}{2}$$

$S_n T_n = n^2(n^2 - 1)$ 이므로 위의 두 식을 서로 곱한 다음 계수 비교법을 적용하자.

$$\frac{n^2\{2a + (n-1)d_1\}\{2b + (n-1)d_2\}}{4} = n^2(n^2 - 1)$$

궁금한 것은 $d_1 d_2$ 의 값이므로 좌변의 식을 전개할 필요 없이 좌변의 식을 전개했을 때 나오는 하나의 항과 그에 대응하는 우변의 항을 비교하면 된다. 최고차항을 비교하자.

$$\text{(좌변의 최고차항)} = \frac{d_1 d_2}{4} n^4$$

$$\text{(우변의 최고차항)} = n^4$$

$$\text{좌} \cdot \text{우변의 최고차항이 서로 같으므로 } \frac{d_1 d_2}{4} = 1, d_1 d_2 = 4 \text{ (O)}$$

3. (ㄷ)은 등차수열의 합 공식과 인수의 관점으로 풀어야 한다. 먼저, 등차수열의 합은 상수항이 없는 n 에 관한 이차식이다. 즉, **등차수열의 합은 반드시 n 을 인수로 갖는다.**

$S_n T_n = n^2(n^2 - 1)$ 이고, S_n, T_n 은 모두 등차수열의 합이므로 이차식이다. 따라서 S_n, T_n 은 4개의 인수 $n, n, n+1, n-1$ 중 두 개씩을 나눠 갖는다. 만약 S_n, T_n 중 하나라도 4개의 인수 중 두 개를 갖지 않는다면 S_n, T_n 모두 이차식이 아니게 된다.

등차수열의 합은 반드시 n 을 인수로 가지므로 S_n, T_n 은 각각 n 을 인수로 갖는다. 따라서 남은 두 인수 $n+1, n-1$ 중 하나는 S_n 이 갖고, 남은 하나는 T_n 이 갖는다.

그런데 $a_1 \neq 0$ 이면 $S_1 \neq 0$ 이므로 **인수정리에 의해 S_n 은 $(n-1)$ 을 인수로 갖지 않는다.** 따라서 S_n 은 $n, n+1$ 을 인수로 가지므로 $S_n = kn(n+1)$ (단, k 는 0이 아닌 실수)

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = kn(n+1) - k(n-1)n \\ &= kn^2 + kn - kn^2 + kn = 2kn \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$$a_1 = S_1 = 2k \text{이므로 } a_n = 2kn$$

이때, ' a_n, b_n 이 등차수열, $S_n T_n = n^2(n^2 - 1)$ ' 이외의 조건이 없으므로 k 는 0이 아닌 모든 실수가 가능하다. $k \neq \frac{1}{2}$ 이면 $a_n \neq n$ 이다. 즉, $a_1 \neq 0$ 이라고 해서 반드시 $a_n = n$ 인 것은 아니다. (X)

옳은 것은 ㄱ, ㄴ이므로 답은 ㉓!!

※ 선지 (ㄷ)은 대우 명제를 통해서도 풀 수 있다.

' $a_1 \neq 0$ 이면 $a_n = n$ 이다.' (명제)

' $a_n \neq n$ 이면 $a_1 = 0$ 이다.' (대우 명제)

대우 명제인 ' $a_n \neq n$ 이면 $a_1 = 0$ 이다.'가 참이면 기존 명제도 참이고, 대우 명제가 거짓이면 기존 명제도 거짓이다. $a_n = n$ 일 때 $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ 이므로 $a_n \neq n$ 일 때 $S_n \neq \frac{n(n+1)}{2}$ 이다.

따라서 $S_n \neq \frac{n(n+1)}{2}$ 일 때 $a_1 = S_1 = 0$ 인지 따지면 된다.

$S_n = \frac{n(n+1)}{p}$ ($p \neq 2$)일 때 $a_1 = S_1 \neq 0$ 이므로 반례가 존재한다. 즉, 대우 명제가 거짓이므로 명제 (ㄷ)도 거짓이다. (X)

(5) 상수항이 0이 아닌 n 에 관한 이차식

이렇게 해서 등차수열의 합 S_n 이 상수항이 0인 n 에 관한 이차식이라는 것을 알아보았다. 그렇다면 상수항이 0이 아닌 n 에 관한 이차식은 무엇을 의미할까?

결론부터 말하자면 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때,

‘ $S_n = an^2 + bn + c (c \neq 0)$ ’와 ‘수열 $\{a_n\}$ 이 둘째 항부터 등차수열을 이룬다.’는 서로가 참이 되기 위한 필요충분 조건이다. 다음 문제를 풀어보면서 그 이유를 생각해보자.

예제(5) 11년 10월 교육청 나형 30번

수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 = 3, a_n = 8n - 4 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

를 만족시키고, 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{S_n} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



1. $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_{10}}$ 을 일일이 구하기는 매우 힘들므로 S_n 의 식을 구하자.

$a_1 = 3, a_n = 8n - 4 (n = 2, 3, 4, \dots)$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 둘째 항부터 등차수열을 이룬다.

$$S_n = a_1 + \sum_{k=2}^n (8k - 4) = a_1 + \sum_{k=1}^n (8k - 4) - 4$$

($k = 1$ 부터 정의된 시그마로 고쳤으니 $(8 - 4)$ 에 해당하는 값을 빼야 한다.)

$$= -1 + 8 \sum_{k=1}^n k - 4n$$

$$= -1 + 4n(n+1) - 4n = 4n^2 - 1$$

$$\begin{aligned} 2. \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{S_n} &= \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{4n^2 - 1} = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{21} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{20}{21} = \frac{10}{21} \end{aligned}$$

$p = 21, q = 10$ 이므로 $p + q = 31$ 이다. **답은 31!!**

그렇게 어려운 문항은 아니므로 답은 수월하게 맞힐 수 있다. 다음 페이지에서 이를 상수항이 0이 아닌 S_n 과 연결지어보자.

이 문제에서 주목해야 할 것은 $S_n = 4n^2 - 1$ 이다. 둘째 항부터 등차수열을 이루는 수열 $\{a_n\}$ 에 대해 S_n 은 상수항이 0이 아닌 이차식이다.

하지만 **문제에서 주어진 수열 $\{a_n\}$ 에 한해 S_n 이 우연히 상수항을 가졌을 가능성도 존재한다.** 미지수를 사용하여 다시 증명해보자.

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = a$, $a_n = bn - c (n = 2, 3, 4, \dots)$ 을 만족시키고 $a \neq b - c$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 은 둘째 항부터 등차수열을 이룬다. 이때, S_n 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + \sum_{k=2}^n (bk - c) = a + \sum_{k=1}^n (bk - c) - (b - c) \\ &= b \sum_{k=1}^n k - cn + a - (b - c) \\ &= \frac{bn(n+1)}{2} - cn + a - (b - c) \end{aligned}$$

S_n 의 상수항은 $a - (b - c)$ 이다. 그런데 $a \neq b - c$ 이므로 상수항은 0이 아니다.

그런데 위의 증명은

‘수열 $\{a_n\}$ 이 둘째 항부터 등차수열을 이루면 $S_n = an^2 + bn + c (c \neq 0)$ 이다.’가 참임을 증명한 것이므로 ‘ $S_n = an^2 + bn + c (c \neq 0)$ ’와 ‘수열 $\{a_n\}$ 은 둘째 항부터 등차수열을 이룬다.’가 서로가 참이 되기 위한 필요충분조건임을 증명하기 위해서는

‘ $S_n = an^2 + bn + c (c \neq 0)$ 이면 수열 $\{a_n\}$ 은 둘째 항부터 등차수열을 이룬다.’

도 참임을 증명해야 한다. 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하자.

$S_n = an^2 + bn + c (c \neq 0)$ 일 때 $a_1 = S_1$, $S_n - S_{n-1} = a_n (n \geq 2)$ 이다.

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = an^2 + bn + c - \{a(n-1)^2 + b(n-1) + c\} \\ &= an^2 + bn + c - \{an^2 + n(b-2a) + a - b + c\} \\ &= 2an - a + b \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$$a_1 = S_1 = a + b + c$$

이때, $a_n = 2an - a + b$ 에 $n = 1$ 을 대입한 값인 $a + b$ 와 $a_1 = a + b + c$ 가 서로 다르므로 수열 $\{a_n\}$ 은 둘째 항부터 등차수열을 이룬다.

따라서 **‘ $S_n = an^2 + bn + c (c \neq 0)$ ’와 ‘수열 $\{a_n\}$ 이 둘째 항부터 등차수열을 이룬다.’는 서로가 참이 되기 위한 필요충분조건이다.**

(6) 함수로 이해하는 등차수열의 합

첫째항이 a 이고 공차가 d 인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 S_n 을 n 에 관해 정리하면 다음과 같다.

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} = \frac{dn^2 + (2a-d)n}{2} = \frac{d}{2}n^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right)n$$

이를 함수와 연결지으면,

수열 $\{S_n\}$ 의 항은 원점을 지나고 최고차항의 계수가 $\frac{d}{2}$ 인 이차함수 $y = \frac{d}{2}x^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right)x$ 위의 x 좌표가 자연수인 점의 y 좌표와 같다.

{등차수열}의 각 항이 직선 위의 x 좌표가 자연수인 점의 y 좌표와 같다면,

{등차수열의 합 수열}의 각 항은 이차함수의 위의 x 좌표가 자연수인 점의 y 좌표와 같다.

예제(6) 13년 3월 교육청 A형 30번

첫째항이 60인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{T_n\}$ 을

$$T_n = |a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n|$$

이라 하자. 수열 $\{T_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $T_{19} < T_{20}$

(나) $T_{20} = T_{21}$

$T_n > T_{n+1}$ 을 만족시키는 n 의 최솟값과 최댓값의 합을 구하시오. [4점]



1. T_n 을 함수로 바라보자. 원점을 지나가는 어떤 이차함수 $f(x)$ 에 대해

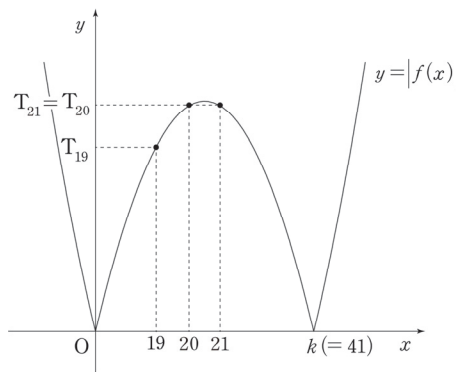
$a_1 + a_2 + \dots + a_n = f(n)$ 이라 할 수 있고 이때 $T_n = |f(n)|$ 이다.

$T_{19} < T_{20}$, $T_{20} = T_{21}$ 를 모두 만족시키는 $y = |f(x)|$ 의 그래프와 $x = 20$, $x = 21$ 의 위치를 좌표 평면에 나타내자.

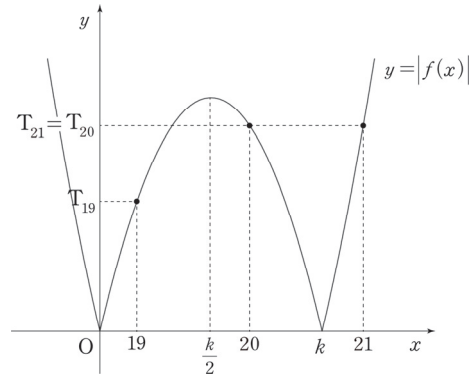
$y = |f(x)|$ 가 x 축과 만나는 점의 0이 아닌 x 좌표를 k 라 할 때, 아래와 같이 $21 < k$ 인 경우와 $k < 21$ 인 경우가 가능하다.

$21 < k$ 일 때 이차함수 $y = f(x)$ 의 대칭축은 $x = \frac{20+21}{2} = \frac{41}{2} = \frac{k}{2}$ 이므로 $k = 41$ 이다.

(i) $21 < k$



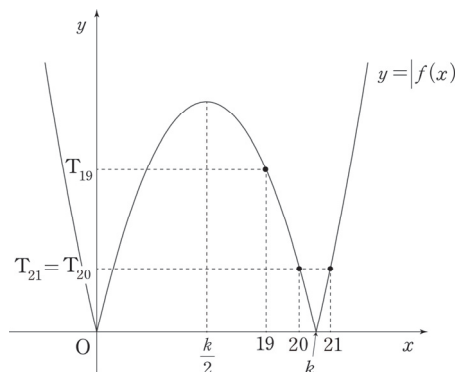
(ii) $k < 21$



※ $T_n = f(n)$ 이라면 이차함수의 대칭성에 의하여 (i)만 가능하지만, $T_n = |f(n)|$ 이므로 (ii)와 같이 $k < 21$ 인 경우도 가능함에 주의하자. ((ii)에서 20이 대칭축의 왼쪽에 있는 경우도 가능하다.)

하지만 (ii) $k < 21$ 인 경우 모순이 발생한다. $y = f(x)$ 의 대칭축은 $x = \frac{k}{2} < \frac{21}{2} = 10.5$ 이므로

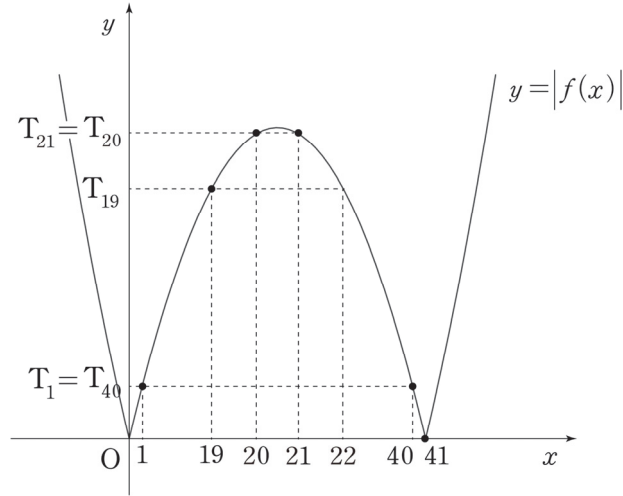
$T_{19} < T_{20} = T_{21}$ 을 만족시킬 수 없다. 즉, $k < 21$ 인 경우 19, 20, 21은 모두 대칭축의 오른쪽에 존재해야 하므로 $T_{20} = T_{21}$ 이라면 아래 그림과 같이 $T_{19} > T_{20} = T_{21}$ 일 수밖에 없으므로 조건을 만족시키지 못한다.



따라서 (i)이 답인 경우이다.

2. 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 $x = \frac{41}{2}$ 에 대하여 대칭이고 x 축과 $x = 0, x = 41$ 에서 만난다.

$y = |f(x)|$ 의 그래프 상에서 $T_n > T_{n+1}$ 을 만족시키는 n 의 최솟값과 최댓값의 합을 구하자.



$n \leq 19$ 일 때 $T_n < T_{n+1}$

$n = 20$ 일 때 $T_n = T_{n+1}$

$21 \leq n \leq 40$ 일 때 $T_n > T_{n+1}$

$41 \leq n$ 일 때 $T_n < T_{n+1}$

따라서 $T_n > T_{n+1}$ 을 만족시키는 n 의 최솟값과 최댓값의 합은 $21 + 40 = 61$ 이다. 답은 61!!

comment

1. 등차수열의 합을 수열을 '이차함수'의 관점에서 해석하고, 각 항을 이차함수의 그래프 위의 점으로 파악해야 한다.

2. 그래프 해석을 하지 않는다면 식으로도 풀 수 있지만, 본 풀이보다 계산이 상당히 많아진다.

$T_n = \left\lfloor \frac{n\{2 \times 60 + (n-1)d\}}{2} \right\rfloor$ 로 일반항을 세운 다음 $T_{20} = T_{21}$ 을 통해 가능한 d 의 두 가지 값을 구하고 각각의 경우에서 $n = 19, 20$ 을 대입하여 $T_{19} < T_{20}$ 을 만족시키는지 확인하면 된다. 각자 계산해보자.

◇ 등비수열

◇ 1. 등비수열의 정의, 판별, 함수와의 관계

(1) 정의

이웃하는 두 항 사이의 비(공비)가 일정한 수열을 등비수열이라 한다. 이름에서도 알 수 있듯이 등차는 ‘차가 일정’, 등비는 ‘비가 일정’하다는 것을 나타낸다.

첫째항이 a 이고 공비가 r ($r \neq 0$)인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은 다음과 같다.

$$a_n = ar^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

이때, 첫째항이 a 이고 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 귀납적 정의는 다음과 같다. (단, $a \neq 0, r \neq 0$)

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = ra_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{혹은}$$

$$a_1 = a, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ 은 $a_{n+1} = ra_n$ 에서 양변을 a_n 으로 나눈 것뿐이지만, 실제 문제에서 만났을 때 헷갈리는 경우가 종종 있으므로 두 형태 모두 알아두자.

혹은 다음과 같이 등비중항을 이용하여 등비수열 $\{a_n\}$ 을 귀납적으로 정의할 수도 있다.

$$a_1 = a, \quad a_2 = ar, \quad a_{n+2}a_n = (a_{n+1})^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{혹은}$$

$$a_1 = a, \quad a_2 = ar, \quad \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(2) 등비수열의 판별

첫째항이 a 이고 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 $a_n = ar^{n-1}$ 에서

$r = 1$ 이면 $a_n = a$ 이고, $r \neq 1$ 이면 a_n 은 밑이 r 인 지수 꼴이다. 특히 n 을 지수로 갖는 밑이 $\{a_n\}$ 의 공비라는 점이 중요하다.

어떤 수열 $\{b_n\}$ 이 '등비수열'인지 판별하고 싶다면 해당 식이 상수 또는 지수 n 에 관한 꼴에 해당하는지 관찰하면 된다. 둘 중 어느 것에도 해당하지 않는다면 수열 $\{b_n\}$ 은 등비수열이 아니다.

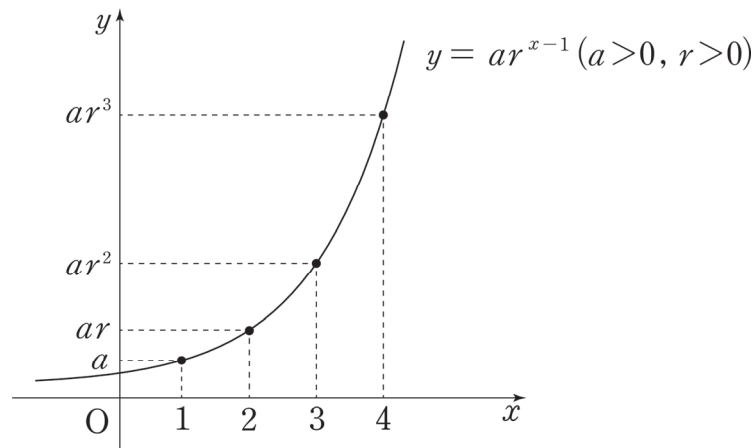
단, 일반항이 상수인 수열은 등차수열인 동시에 등비수열이라는 점을 주의하자.

(3) 등비수열과 함수의 관계

일반항이 $a_n = ar^{n-1}$ 인 등비수열은 지수함수 $y = ar^{x-1}$ 와 연결지을 수 없다. 지수함수의 밑은 무조건 양수여야 하지만, 등비수열에서 공비는 양수가 아닐 수도 있기 때문이다.

단, $r > 0$ 인 경우 일반항이 $a_n = ar^{n-1}$ 인 등비수열의 항은 지수함수 $y = ar^{x-1}$ 위의 x 좌표가 자연수인 점들의 y 좌표와 같다.

이는 지수함수의 정의역의 항들이 순서대로 등차수열을 이루는 경우, 정의역에 대응하는 치역의 원소들은 순서대로 등비수열을 이룬다는 점과도 연결된다.



※ 지수함수와 역함수 관계에 있는 로그함수의 정의역의 항들이 순서대로 등비수열을 이루는 경우, 정의역에 대응하는 치역의 원소들은 순서대로 등차수열을 이룬다.

(4) $\{a_n\}$ 이 등차, 등비수열일 때 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$

① $\{a_n\}$ 이 등차수열일 때 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 등차수열이 아니다. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ 를 구하는 공식도 존재하지 않는다. 만약 등차수열 $\{a_n\}$ 에 관해 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 이 주어졌다면, 이를 해결하는 기막힌 공식은 없으므로 다른 조건과 연결 지어 문제를 풀어나가야 한다.

교육청에서 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ 의 값을 물어본 적이 있으나 직접적인 값이 아니라 부등식을 만족시키는 n 의 최댓값을 물어봤고, 출제 의도는 '대칭성'을 이용한 계산이었다. 이 문제는 수열의 합 파트에서 예제로 만나볼 것이다.

② 반면, $\{a_n\}$ 이 등비수열일 때 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 등비수열이다. $\{a_n\}$ 의 일반항이 ar^{n-1} 일 때, $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 일반항은 $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$ 이기 때문이다. (단, $a \neq 0, r \neq 0$ 이다.)

◇ 2. 등비중항

0이 아닌 세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b 를 a 와 c 의 등비중항이라고 한다.

b 가 a, c 의 등비중항이면 $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ (공비)이므로 $b^2 = ac$ 가 성립한다. a, b, c 가 모두 양수이면 $b = \sqrt{ac}$ 으로 b 를 a, c 의 기하평균이라 할 수 있지만, 음수인 항이 포함된 경우 그러한 해석은 가능하지 않다.

등차중항만큼 중요하지는 않지만, 등비중항을 이용할 경우 계산이 간단해지는 문제도 많이 출제되므로 때에 따라 적절히 사용할 준비는 돼 있어야 한다.

※ 등비수열에서 곱이 같은 쌍들

등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1a_n = a_2a_{n-1} = a_3a_{n-2} = a_4a_{n-3} = \dots$

자연수 p, q 에 대해 등비수열 $\{a_n\}$ 의 항 a_p 와 a_q 가 있을 때, $p+q$ 의 값이 같은 (a_p, a_q) 쌍에 대해 $a_p a_q$ 의 값은 일정하다.

(증명)

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면 $a_p = ar^{p-1}$, $a_q = ar^{q-1}$ 이므로 $a_p a_q = a^2 r^{p+q-2}$ 이다. 이때, a, r 은 상수이므로 $p+q$ 가 상수이면 $a_p a_q$ 도 상수이다.

예제(7) 12학년도 6월 평가원 나형 8번

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = \sqrt{5}$ 일 때, $a_1 \times a_2 \times a_4 \times a_5$ 의 값은? [3점]

- ① $\sqrt{5}$ ② 5 ③ $5\sqrt{5}$ ④ 25 ⑤ $25\sqrt{5}$

예제(8) 05학년도 6월 평가원 나형 11번

다섯 개의 실수 a, b, c, d, e 를 적당히 배열하여 공비가 1보다 큰 등비수열을 만들었다. a, b, c, d, e 가 다음 조건을 만족시킬 때 b 가 이 수열의 제 n 항이라면, n 의 값은? [4점]

(가) $e = \sqrt{cd}$

(나) $\frac{a}{e} = \frac{c}{d}$

(다) $a < b$

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



예제(7) 해설

$$a_1 \times a_5 = a_2 \times a_4 = (a_3)^2 = 5 \text{이므로}$$

$$a_1 \times a_2 \times a_4 \times a_5 = 5 \times 5 = 25 \text{이다. 답은 ④!!}$$



예제(8) 해설

1. (가) $e = \sqrt{cd}$ 에서 $e^2 = cd$ 이므로 e 는 c, d 의 등비중항이다.

(나) $\frac{a}{e} = \frac{c}{d}$ 에서 $ad = ec$ 이다.

2. (가), (나)를 모두 만족시키는 a, d, c, e 의 순서를 알아보자.

우선, e 는 c, d 의 등비중항이므로 c, e, d 의 순서대로 등비수열을 이루거나 d, e, c 의 순서대로 등비수열을 이룬다.

(i) c, e, d 의 순서대로 등비수열을 이룰 때 $ad = ec$ 를 만족시키려면 a, c, e, d 순으로 등비수열을 이뤄야 한다.

(ii) d, e, c 의 순서대로 등비수열을 이룰 때 $ad = ec$ 를 만족시키려면 d, e, c, a 순으로 등비수열을 이뤄야 한다.

(다)에서 $a < b$ 이므로

(i)에서 a, c, e, d, b 의 순서대로 등비수열을 이루거나

(ii)에서 d, e, c, a, b 의 순서대로 등비수열을 이룬다.

어느 쪽을 택하든 b 는 이 수열의 제5항이므로 $n = 5$ 이다. 답은 ⑤!!

comment

c, e, d 의 순서대로 등비수열을 이룰 때 $ad = ec$ 를 만족시키려면 a, c, e, d 순으로 등비수열을 이뤄야 한다는 것을 잘 이해하자. ‘등차수열’에서는 ‘합이 같은 쌍’이 중요하고, ‘등비수열’에서는 ‘곱이 같은 쌍’이 중요하다.

◇ 2. 등비수열의 합

(1) 첫째항이 a , 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은 다음과 같다.

$$(i) r \neq 1 \text{ 일 때, } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$(ii) r = 1 \text{ 일 때, } S_n = na$$

저자는 $r < 1$ 이면 $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 을 이용하고 $r > 1$ 이면 $\frac{a(r^n-1)}{r-1}$ 을 이용하는 편이다. 크게 중요한 것은 아니다. 또한, 일반적으로 $r \neq 1$ 이지만 $r = 1$ 인 경우도 등장할 수 있으므로 가능성을 배제하지 말자!

$$(2) S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = a(1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1})$$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구할 때 항상 $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ 을 이용해야 하는 것은 아니다. $S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = a(1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1})$ 으로 항을 나열하여 수열의 합을 표현할 수도 있다.

그렇다고 해서 두 식이 서로 다른 의미인 것은 아니다.

고등학교 저학년 인수분해 파트에서 배웠듯이 $r^n - 1 = (r-1)(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + r + 1)$ 이므로

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} = \frac{a(r-1)(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + r + 1)}{r-1} = a(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + r + 1) \text{이다.}$$

예제(9) 08년 3월 교육청 나형 9번

등비수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 5항까지의 합이 $\frac{31}{2}$ 이고 곱이 32일 때,

$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{31}{4}$

② $\frac{31}{8}$

③ $\frac{31}{12}$

④ $\frac{8}{31}$

⑤ $\frac{4}{31}$



1. $\{a_n\}$ 이 등비수열이므로 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 도 등비수열이다.

$$a_n = ar^{n-1} \text{으로 놓으면 } \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a} \times \left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$$

등비수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 5항까지의 합이 $\frac{31}{2}$ 이고 곱이 32이므로

$$\frac{a(1-r^5)}{1-r} = \frac{31}{2}$$

$$a \times ar \times ar^2 \times ar^3 \times ar^4 = a^5 r^{10} = 32 = 2^5, ar^2 = 2$$

$$\begin{aligned} 2. \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} &= \frac{\frac{1}{a} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^5 \right\}}{1 - \frac{1}{r}} \\ &= \frac{\frac{1}{a} \left(\frac{r^5 - 1}{r^5} \right)}{\frac{r-1}{r}} = \frac{r^5 - 1}{a(r-1)} \times \frac{1}{r^4} \dots \text{㉠} \end{aligned}$$

$$\frac{a(1-r^5)}{1-r} = \frac{31}{2} \text{의 양변에 } \frac{1}{a^2} \text{을 곱하면 } \frac{1-r^5}{a(1-r)} = \frac{r^5-1}{a(r-1)} = \frac{31}{2a^2}$$

$$\text{이를 ㉠에 대입하면 } \frac{31}{2a^2} \times \frac{1}{r^4} = \frac{31}{2} \times \left(\frac{1}{ar^2}\right)^2 = \frac{31}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{31}{8}$$

답은 ㉡!

comment

등비수열의 합 공식을 이용하지 않고도 풀 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{ar} + \frac{1}{ar^2} + \frac{1}{ar^3} + \frac{1}{ar^4} \\ &= \frac{1}{ar^4} (r^4 + r^3 + r^2 + r + 1) \dots \text{㉡} \end{aligned}$$

등비수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 5항까지의 합은 $\frac{31}{2}$ 이므로 $a(1+r+r^2+r^3+r^4) = \frac{31}{2}$

$1+r+r^2+r^3+r^4 = \frac{31}{2a}$ 를 ㉡에 대입하면

$$\frac{1}{ar^4} (r^4 + r^3 + r^2 + r + 1) = \frac{1}{a^2 r^4} \times \frac{31}{2} = \left(\frac{1}{ar^2}\right)^2 \times \frac{31}{2} = \frac{31}{8}$$

$$(3) r^n \times \sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=p+n}^{q+n} a_k \quad (\text{단, } p, q \text{는 } q > p \text{인 자연수이고 } \{a_n\} \text{은 공비가 } r \text{인 등비수열})$$

등차수열에서 배운 공식 $\sum_{k=p}^q a_k + dn(q-p+1) = \sum_{k=p+n}^{q+n} a_k$ 와 비슷한 느낌이지만, 이 공식이 훨씬 중요하다. 마찬가지로 공식을 외우려 하지 말고 이해하자. $a_p + a_{p+1} + \dots + a_q$ 가 $a_{p+n} + a_{p+n+1} + \dots + a_{q+n}$ 이 되기 위한 조건이 생각하면 자연스럽게 이해할 수 있다.

$$a_p \times r^n = a_{p+n}, \quad a_{p+1} \times r^n = a_{p+n+1}, \quad \dots, \quad a_q \times r^n = a_{q+n} \text{이므로}$$

$$(a_p + a_{p+1} + \dots + a_q) \times r^n = a_{p+n} + a_{p+n+1} + \dots + a_{q+n} \text{이다.}$$

시그마를 이용하여 예쁘게 정리하면 $r^n \times \sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=p+n}^{q+n} a_k$ 이다.

앞으로 두 등비수열의 합이 있을 때 $r^n \times \sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=p+n}^{q+n} a_k$ 성질을 이용할 수 있는지 확인하자.

e.g. 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $r^2 \times \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=3}^{12} a_k$ 이다.

공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때,

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{S_3 + r^3 \times S_3}{S_3} = 1 + r^3 \text{이다.}$$

한편, 이 성질을 이용하면 등비수열의 합을 굉장히 유연하게 바라볼 수 있다.

예를 들어, 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

수열 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, \dots$ 의 공비는 r 이다. (수열 $\{a_n + a_{n+1}\}$)

수열 $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots$ 의 공비는 r 이다. (수열 $\{a_{n+1} - a_n\}$)

수열 $a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_5 + a_6, \dots$ 의 공비는 r^2 이다. (수열 $\{a_{2n-1} + a_{2n}\}$)

이때, 수열 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, \dots$ 의 공비가 r 이라는 점을 수식적으로도 증명할 수 있다.

수열 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, \dots$ 은 수열 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 이다. 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 할 때 $a_n = ar^{n-1}$ 이다. 따라서 $a_n + a_{n+1} = ar^{n-1} + ar^n = ar^{n-1}(r+1) = (a+r)ar^{n-2}$ 에서 수열 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 은 첫째항이 $a+ar(=a_1+a_2)$ 이고 공비가 r 인 등비수열이다.

수열 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 과 수열 $\{a_{2n-1} + a_{2n}\}$ 에서도 똑같이 증명하면 된다. 스스로 해보자.

단, $r^n \times \sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=p+n}^{q+n} a_k$ 와 관련하여 주의할 부분이 있다.

예를 들어, 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $16 \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=5}^{14} a_k$ 라 할 때, (단, $r \neq 1$)

$r^4 \times \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=5}^{14} a_k$ 이므로 $16 \times \sum_{k=1}^{10} a_k = r^4 \times \sum_{k=1}^{10} a_k$ 에서 $16 = r^4$, $r = \pm 2$ 일까?

아니다. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 0$ 인 경우에도 $16 \times \sum_{k=1}^{10} a_k = r^4 \times \sum_{k=1}^{10} a_k$ 은 성립한다.

(이런 실수를 방지하려면 이항하여 인수분해하는 것이 가장 좋다.)

즉, $\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} = 0$ 에서 $r^{10} = 1$, $r = -1$ ($\because r \neq 1$)인 경우도 고려해야 한다.

($r = -1$ 인 경우 $\sum_{k=1}^{10} a_k = a - a + a - a + \dots + a - a = 0$ 이 된다.)

예제(10) 17년 3월 교육청 고2 가형 18번

첫째항이 2인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_4 의 값은? [4점]

(가) $S_{12} - S_2 = 4S_{10}$

(나) $S_{12} < S_{10}$

① -24

② -16

③ -8

④ 16

⑤ 24



1. 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하자.

(가) $S_{12} - S_2 = 4S_{10}$ 에서 $a_3 + \dots + a_{12} = 4(a_1 + \dots + a_{10})$

$$a_3 + \dots + a_{12} = r^2 \times (a_1 + \dots + a_{10}) \text{이므로 } r^2 \times (a_1 + \dots + a_{10}) = 4 \times (a_1 + \dots + a_{10})$$

$$\therefore r^2 = 4 \text{ 또는 } a_1 + \dots + a_{10} = 0$$

$a_1 + \dots + a_{10} = 0$ 일 때의 r 의 값을 구하자. $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2인 등비수열이므로

$r = 1$ 인 경우 $a_1 + \dots + a_{10} = 20$ (X)

$r \neq 1$ 인 경우 $a_1 + \dots + a_{10} = \frac{2(r^{10} - 1)}{r - 1} = 0$ 에서 $r^{10} = 1, r = -1$ ($\because r \neq 1$)

2. 따라서 $r = 2$ 또는 $r = -2$ 또는 $r = -1$ 이다. 조건 (나)를 통해 r 의 값을 구하자.

$S_{12} < S_{10}$ 에서 $S_{12} - S_{10} < 0, a_{11} + a_{12} < 0$

$$2r^{10}(1+r) < 0, 1+r < 0$$

$$r < -1$$

$$\therefore r = -2, a_4 = ar^3 = 2 \times (-2)^3 = -16$$

답은 ㉔!!

comment

조건 (가)를 통해 $r^2 = 4$ 또는 $a_1 + \dots + a_{10} = 0$ 을 도출한 다음, 조건 (나)를 만족시키는 r 의 값을 구하면 된다. 특히 $S_{12} < S_{10}$ 에서 S_{10} 을 이항하여 $S_{12} - S_{10} = a_{11} + a_{12} < 0$ 을 관찰하는 것은 ‘수열의 합과 일반항의 관계’를 이용하는 중요한 테크닉이므로 반드시 숙지하자.

예제(11) 20년 4월 교육청 가형 17번

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_3 의 값은? [4점]

$$(가) \sum_{k=1}^4 a_k = 45$$

$$(나) \sum_{k=1}^6 \frac{a_2 \times a_5}{a_k} = 189$$

① 12

② 15

③ 18

④ 21

⑤ 24



1. (가)에서 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 45$ 이다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면 ($a > 0, r > 0$)

(나)에서 $a_2 \times a_5 \times \frac{1}{a_k} = ar \times ar^4 \times a^{-1}r^{1-k} = ar^{6-k}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 ar^{6-k} &= ar^5 + ar^4 + ar^3 + ar^2 + ar + a \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 189 \end{aligned}$$

따라서 $a_5 + a_6 = 144$

2. $a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_5 + a_6$ 은 이 순서대로 공비가 r^2 인 등비수열을 이룬다.

$a_1 + a_2 = t$ 라고 하면 $t + tr^2 = 45, tr^4 = 144$ 이다.

따라서 $t = \frac{144}{r^4}$ 를 $t + tr^2 = 45$ 에 대입하면 $\frac{144}{r^4} + \frac{144}{r^2} = 45, \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^2} = \frac{45}{144} = \frac{5}{16}$

양변에 r^4 을 곱하면 ($\because r > 0$) $16 + 16r^2 = 5r^4$ 이다. $r^2 = k$ ($k > 0$)라 하면

$$5k^2 - 16k - 16 = 0, (5k+4)(k-4) = 0 \therefore k = 4 \quad (\because k > 0)$$

$r^2 = 4$ 에서 $r > 0$ 이므로 $r = 2$ 이다.

3. $a_5 + a_6 = 144$ 에서 $16a + 32a = 48a = 144$ 이므로 $a = \frac{144}{48} = 3$ 이다.

따라서 $a_3 = ar^2 = 3 \times 4 = 12$ 이다. **답은 ㉠!!**

comment

무작정 (가), (나) 조건을 보고 등비수열의 합 공식을 이용하려 하면 계산이 꽤 복잡해진다. 항상 조건 간 관계를 관찰하면서 책에서 배운 도구를 적용할 수 있는지 살펴보자.

지금까지 배운 등차, 등비수열의 태도와 도구를 생각하면서 다음 준킬러 문항을 풀어보자.

예제(12) 19학년도 수능 나형 29번

첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, $a_7 + b_7$ 의 값을 구하시오. [4점]

$$(가) \sum_{n=1}^5 (a_n + b_n) = 27$$

$$(나) \sum_{n=1}^5 (a_n + |b_n|) = 67$$

$$(다) \sum_{n=1}^5 (|a_n| + |b_n|) = 81$$



1. (나) 식에서 (가) 식을 변끼리 빼면 $\sum_{n=1}^5 (|b_n| - b_n) = 40$ 이다.

$\{b_n\}$ 은 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열이므로 $b_1, b_3, b_5 > 0$, $b_2, b_4 < 0$ 이다.

$$b_n > 0 \text{이면 } |b_n| - b_n = 0,$$

$$b_n < 0 \text{ 이면 } |b_n| - b_n = -2b_n \text{ 이므로}$$

$$\sum_{n=1}^5 (|b_n| - b_n) = -2b_2 - 2b_4 = 40$$

$$b_2 + b_4 = -20$$

$\{b_n\}$ 의 첫째항을 b , 공비를 r 이라 하면

$$br + br^3 = -20$$

$$br(1 + r^2) = -20$$

이때, $br(1 + r^2) = -20$ 을 통해 b, r 의 값을 구할 수 없다고 생각하면 안 된다. b 는 자연수, r 은 음의 정수이므로 $br(1 + r^2) = -20$ 을 만족하는 b, r 의 값은 유의미할 정도로 적다.

$1 + r^2$ 이 20의 양의 약수여야 하므로 $r = -1$ 또는 $r = -2$ 또는 $r = -3$ 이다.

$$r = -1 \text{ 일 때 } b = 10$$

$$r = -2 \text{ 일 때 } b = 2$$

$$r = -3 \text{ 일 때 } b = \frac{2}{3} \text{ (X)}$$

$$\therefore b_n = 10 \times (-1)^{n-1} \text{ 또는 } b_n = 2 \times (-2)^{n-1}$$

2. $b_n = 10 \times (-1)^{n-1}$ 또는 $b_n = 2 \times (-2)^{n-1}$ 을 $\sum_{n=1}^5 (a_n + b_n) = 27$ 에 대입하자.

(i) $b_n = 10 \times (-1)^{n-1}$ 인 경우

$$\sum_{n=1}^5 (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^5 a_n + 10 = 27$$

$$\sum_{n=1}^5 a_n = 17$$

$\{a_n\}$ 은 등차수열이므로 등차중항을 이용하면 $\sum_{n=1}^5 a_n = 5a_3 = 17, a_3 = \frac{17}{5}$ (X)

$\{a_n\}$ 의 첫째항은 자연수이고 공차는 음의 정수이므로 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 정수이다.
따라서 이 경우는 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $b_n = 2 \times (-2)^{n-1}$ 인 경우

$$\sum_{n=1}^5 (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^5 a_n + 22 = 27$$

$$\sum_{n=1}^5 a_n = 5$$

마찬가지로 등차중항을 이용하면 $5a_3 = 5, a_3 = 1$ (O)

a_3 은 자연수이므로 조건을 만족시킨다.

3. (나) $\sum_{n=1}^5 (a_n + |b_n|) = 67$, (다) $\sum_{n=1}^5 (|a_n| + |b_n|) = 81$ 를 이용하여 a_n 의 나머지 항을 구하자.

(다) 식에서 (나) 식을 변끼리 빼면 $\sum_{n=1}^5 (|a_n| - a_n) = 14$ 이다.

$\{a_n\}$ 의 공차는 음의 정수이고 $a_3 = 1$ 이므로 $a_1, a_2, a_3 > 0, a_4, a_5 \leq 0$ 이다.

$a_n > 0$ 이면 $|a_n| - a_n = 0, a_n < 0$ 이면 $|a_n| - a_n = -2a_n$ 이므로

$$\sum_{n=1}^5 (|a_n| - a_n) = -2a_4 - 2a_5 = 14$$

$$a_4 + a_5 = -7$$

$$(1+d) + (1+2d) = -7, 3d = -9$$

$$\therefore d = -3$$

따라서 $a_7 = a_3 + 4d = 1 - 12 = -11, b_7 = br^6 = 2 \times (-2)^6 = 128$ 이므로

$a_7 + b_7 = -11 + 128 = 117$ 이다. 답은 117!!

comment

실전에서 마주치면 꽤 까다로운 문항이다. 이 문항 해결에 필요한 행동은 다음과 같다.

1. (가), (나), (다) 식을 적절히 변끼리 빼서 b_n 에 관한 식과 a_n 에 관한 식 얻기
2. b, r 은 각각 실수보다 작은 범위인 자연수, 음의 정수이므로 $br(1+r^2) = -20$ 을 만족시키는 b, r 의 값 얻기
3. 등차중항을 이용하여 등차수열의 합 표현하기

CHAPTER 05 유제

01 17학년도 수능 나형 15번

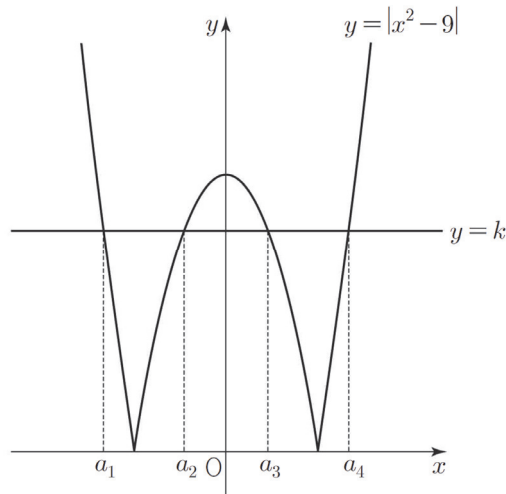
공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_2 의 값은? [4점]

(가) $a_6 + a_8 = 0$
 (나) $|a_6| = |a_7| + 3$

- ① -15 ② -13 ③ -11 ④ -9 ⑤ -7

02 14년 4월 교육청 A형 20번

그림과 같이 함수 $y = |x^2 - 9|$ 의 그래프가 직선 $y = k$ 와 서로 다른 네 점에서 만날 때, 네 점의 x 좌표를 각각 a_1, a_2, a_3, a_4 라 하자. 네 수 a_1, a_2, a_3, a_4 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 상수 k 의 값은? (단, $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$) [4점]



- ① $\frac{34}{5}$ ② 7 ③ $\frac{36}{5}$ ④ $\frac{37}{5}$ ⑤ $\frac{38}{5}$

03 09학년도 9월 평가원 나형 10번

자연수 n 에 대하여 함수 $y = 2^{x+n}$ 의 그래프가 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프와 만나는 점을 P_n 이라 하자. 점 P_n 의 x 좌표를 a_n , y 좌표를 b_n 이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.
ㄴ. 임의의 자연수 m, n 에 대하여 $b_m b_n = b_{m+n}$ 이다.
ㄷ. $2b_n < b_{n+1}$ 을 만족하는 자연수 n 이 존재한다.

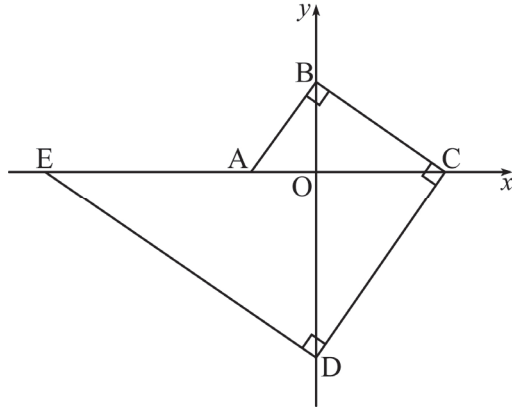
- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 07학년도 수능 나형 22번

첫째항이 0이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 이 $a_{n+1}b_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 를 만족시킬 때, b_{27} 의 값을 구하시오. [4점]

05 06년 3월 교육청 나형 14번

그림과 같이 좌표축 위의 다섯 개의 점 A, B, C, D, E에 대하여 $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{BC} \perp \overline{CD}$, $\overline{CD} \perp \overline{DE}$ 가 성립한다. 세 선분 AO, OC, EA의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 직선 AB의 기울기는? (단, O는 원점이고 $\overline{OA} < \overline{OB}$ 이다.) [4점]



- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

06 05학년도 6월 평가원 나형 14번

함수 $f(x) = \log_4 x$ 일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. 양수 x 에 대하여 $f\left(\frac{x}{4}\right) = f(x) + 1$ 이다.

ㄴ. 수열 $\{f(2^n)\}$ 은 등차수열이다.

ㄷ. $x > 1$ 일 때, $f(f(x)) > 0$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

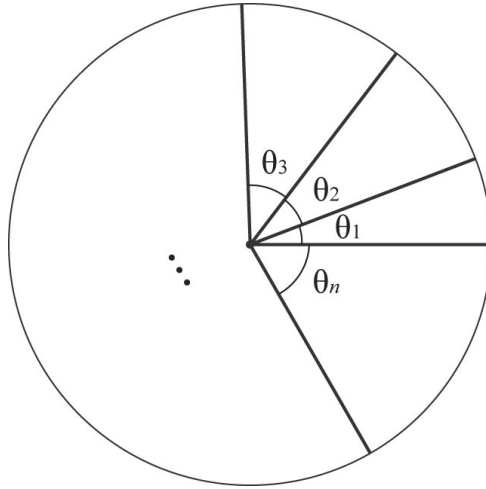
07 14년 3월 교육청 B형 28번

첫째항이 a 이고 공차가 -4 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.
모든 자연수 n 에 대하여 $S_n < 200$ 일 때, 자연수 a 의 최댓값을 구하시오. [4점]

08 09년 7월 교육청 나형 7번

넓이가 A 인 원을 중심각이 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$ 인 n 개의 부채꼴로 나누고 중심각이 θ_k ($k=1, 2, \dots, n$) 인 부채꼴의 넓이를 A_k 이라 하자. 수열 $\{\theta_n\}$ 이 등차수열을 이루고,

$$\sum_{k=1}^n \theta_k = 2\pi \text{ 이다. } A_1 + A_n = \frac{1}{5}A \text{ 일 때, } n \text{ 의 값은? [3점]}$$



- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

09 11학년도 6월 평가원 나형 25번

첫째항이 16이고 공비가 $2^{\frac{1}{10}}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\log a_n$ 의 소수 부분을 b_n 이라 하자.

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_{k-1}, b_k, b_{k+1} + 1$$

이 주어진 순서로 등차수열을 이룰 때, k 의 값을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.301$ 로 계산한다.)

[4점]

10 09년 4월 교육청 나형 21번

등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_3 = 40$, $a_8 = 30$ 일 때, $|a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}|$ 이 최소가 되는 자연수 n 의 값을 구하시오. [3점]

11 18년 4월 교육청 나형 28번

등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 + a_2 + a_3 = 159$

(나) $a_{m-2} + a_{m-1} + a_m = 96$ 인 자연수 m 에 대하여 $\sum_{k=1}^m a_k = 425$ (단, $m > 3$)

a_{11} 의 값을 구하시오. [4점]

12 07년 3월 교육청 나형 22번

n 개의 항으로 이루어진 등차수열 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 이 다음 조건을 만족한다.

- (가) 처음 4 개 항의 합은 26 이다.
(나) 마지막 4 개 항의 합은 134 이다.
(다) $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 260$

이때 n 의 값을 구하시오. [4점]

13 20학년도 수능 나형 15번

첫째항이 50이고 공차가 -4 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때,

$\sum_{k=m}^{m+4} S_k$ 의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 m 의 값은? [4점]

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12



CHAPTER
05 해설

01 17학년도 수능 나형 15번

답 : ①

1. 등차중항을 이용하자. (가)에서 $a_6 + a_8 = 2a_7 = 0$ 이므로 $a_7 = 0$

(나)에서 $|a_6| = |a_7| + 3$, $|a_6| = 3$

$\{a_n\}$ 의 공차는 양수이므로 $a_6 = -3$, $d = 3$ 이다. (단, 공차 = d)
($a_6 = 3$ 인 경우 $d = -3$ 이 되어 조건을 위배한다.)

2. $a_2 = a_7 - 5d = -5d = -15$

02 14년 4월 교육청 A형 20번

답 : ③

1. 네 수 a_1, a_2, a_3, a_4 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 다음과 같이 놓자.

$$a_1 = a - 3d, a_2 = a - d, a_3 = a + d, a_4 = a + 3d \text{ (공차는 } 2d)$$

이때, $y = |x^2 - 9|$ 의 그래프는 $x = 0$ 에 대하여 대칭이므로 $a_1 + a_4 = a_2 + a_3 = 0$ 이다.
 $a_2 + a_3 = (a - d) + (a + d) = 2a = 0$, $a = 0$

따라서 $a_1 = -3d, a_2 = -d, a_3 = d, a_4 = 3d$

2. $f(x) = |x^2 - 9|$ 라 하면 $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = f(a_4) = k$ 이다. ... ㉠
 $f(a_3) = f(a_4)$ 에서 $f(d) = f(3d)$, $|d^2 - 9| = |9d^2 - 9|$

절댓값을 풀어주면 $d^2 - 9 = 9d^2 - 9$ 또는 $d^2 - 9 = -9d^2 + 9$ 이다.

$d^2 - 9 = 9d^2 - 9$ 인 경우 $d = 0$ 이다. 그러나 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ 이므로 $d > 0$ 이다.

따라서 $d^2 - 9 = -9d^2 + 9$ 에서 $10d^2 = 18$, $d^2 = \frac{9}{5}$, $d = \sqrt{\frac{9}{5}}$ 이다.

3. ㉠에서 $f(a_3) = k$, $f\left(\sqrt{\frac{9}{5}}\right) = \left|\frac{9}{5} - 9\right| = \frac{36}{5} = k$ 이다.

03 09학년도 9월 평가원 나형 10번

답 : ③

$2^{x+n} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 교점의 x 좌표가 a_n , y 좌표가 b_n 이다. ($y = 2^{x+n}$ 와 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 교점은 하나밖에 생기지 않는다.)

$$2^{x+n} = \left(\frac{1}{2}\right)^x, 2^{x+n} = 2^{-x}$$

양변에 2^x 를 곱하면 $2^{2x+n} = 1, 2x+n=0, x=-\frac{n}{2}$

$$\therefore a_n = \frac{n}{2}, b_n = 2^{-\frac{n}{2}}$$

1. $a_n = \frac{n}{2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 $\frac{1}{2}$ 이고 첫째항이 0인 등차수열이다. (O)

2. $b_n = 2^{-\frac{n}{2}}, b_m = 2^{-\frac{m}{2}}$ 이므로 $b_m b_n = 2^{-\frac{m}{2}} \times 2^{-\frac{n}{2}} = 2^{-\frac{m}{2}-\frac{n}{2}} = 2^{-\frac{(m+n)}{2}} = b_{m+n}$ (O)

3. $2b_n < b_{n+1}, 2 \cdot 2^{-\frac{n}{2}} < 2^{-\frac{n+1}{2}}, 2^{-\frac{n-2}{2}} < 2^{-\frac{n+1}{2}}$

$f(x) = 2^x$ 라 하면 $f(x)$ 는 증가함수이므로 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.

이때, $-\frac{n-2}{2} > -\frac{n+1}{2}$ 이므로 $2^{-\frac{n-2}{2}} > 2^{-\frac{n+1}{2}}$ 이다. 따라서 $2b_n < b_{n+1}$ 를 만족시키는 자연수 n 은 존재하지 않는다. (X)

옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

04 07학년도 수능 나형 22번

답 : 13

$\{a_n\}$ 은 첫째항이 0이고 공차가 0이 아닌 등차수열이므로 공차를 d 라 하면

$$a_{n+1} = nd, \sum_{k=1}^n a_k = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} = \frac{n(n-1)d}{2}$$
이다.

이를 $a_{n+1}b_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 에 대입하면 $ndb_n = \frac{n(n-1)d}{2}$

$d > 0, n > 0$ 이므로 양변을 nd 로 나누면 $b_n = \frac{n-1}{2}$ 이다.

$$\therefore b_{27} = \frac{26}{2} = 13$$

(뒷 페이지 다른 풀이)

※ 위의 풀이에서는 등차수열과 등차수열의 합의 일반항을 이용하여 답을 구했다. 그런데 $\sum_{k=1}^n a_k = S_n$ 이라 하면 $a_{n+1}b_n = S_n$ 이다. 하나의 식이 S_n 과 a_{n+1} 을 동시에 포함하고 있으므로 수열의 합과 일반항 사이의 관계인 $S_n - S_{n-1} = a_n (n \geq 2)$ 을 이용해서 풀 수는 없을까?

$$a_{n+1}b_n = S_n \cdots \textcircled{1} \quad a_n b_{n-1} = S_{n-1} (n \geq 2) \cdots \textcircled{2}$$

①에서 ②을 변끼리 빼면 $a_{n+1}b_n - a_n b_{n-1} = a_n (n \geq 2)$ 이다.

$a_{n+1} = dn, a_n = d(n-1)$ 이므로 이를 $a_{n+1}b_n - a_n b_{n-1} = a_n (n \geq 2)$ 에 대입하면 $dnb_n - d(n-1)b_{n-1} = d(n-1) (n \geq 2)$, $d > 0$ 이므로 양변을 d 로 나누면 $nb_n - (n-1)b_{n-1} = n-1 (n \geq 2)$ 이다. n 자리에 $2, 3, \dots, n-1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} 2b_2 - b_1 &= 1 \\ 3b_3 - 2b_2 &= 2 \\ 4b_4 - 3b_3 &= 3 \\ &\vdots \\ nb_n - (n-1)b_{n-1} &= n-1 \end{aligned}$$

위의 등식들을 변끼리 모두 더하면 $nb_n - b_1 = \frac{(n-1)n}{2} (n \geq 2)$ 이다.

$a_{n+1}b_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 에서 $a_2b_1 = a_1 = 0$ 이다. 이때, $a_2 > 0$ 이므로 $b_1 = 0$ 이다.

$$\therefore nb_n = \frac{(n-1)n}{2}, b_n = \frac{n-1}{2} (n \geq 1) \text{이므로 } b_{27} = \frac{26}{2} = 13$$

05 06년 3월 교육청 나형 14번

답 : ①

1. 직선 AB의 기울기와 직선 DC의 기울기가 서로 같고,
직선 BC의 기울기와 직선 ED의 기울기가 서로 같다는 점을 이용하자.

$$(\text{직선 AB의 기울기}) = (\text{직선 DC의 기울기}) = m$$

이라 하면 직선 AB와 직선 BC는 서로 직교하므로

$$(\text{직선 BC의 기울기}) = (\text{직선 ED의 기울기}) = -\frac{1}{m} \text{이다.}$$

2. 점 A의 좌표를 $(-a, 0) (a > 0)$ 이라 하면 직선 AB의 기울기가 $m (m > 1)$ 이므로 점 B의 좌표는 $(0, am)$ 이다. ($\overline{OA} < \overline{OB}$ 이므로 $m > 1$ 이다.)

$$(\text{직선 BC의 기울기}) = -\frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = -\frac{am}{\overline{OC}} = -\frac{1}{m} \text{이므로 } \overline{OC} = am^2$$

따라서 점 C의 좌표는 $(am^2, 0)$ 이다.

$$(\text{직선 DC의 기울기}) = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OD}}{am^2} = m \text{이므로 } \overline{OD} = am^3$$

따라서 점 D의 좌표는 $(0, -am^3)$ 이다.

$$(\text{직선 ED의 기울기}) = -\frac{\overline{OD}}{\overline{OE}} = -\frac{am^3}{\overline{OE}} = -\frac{1}{m} \text{이므로 } \overline{OE} = am^4$$

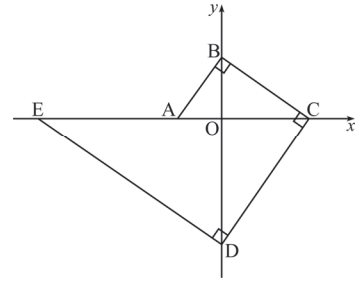
따라서 점 E의 좌표는 $(-am^4, 0)$ 이다.

3. 따라서 세 선분 AO, OC, EA의 길이는 각각 $a, am^2, am^4 - a$ 이고, 이 순서대로 등차수열을 이루므로 등차중항을 이용하면 $2am^2 = am^4$ 이다. $a > 0$ 이므로 양변을 a 로 나누면 $2m^2 = m^4, m^4 - 2m^2 = 0, m^2(m^2 - 2) = 0, m^2(m + \sqrt{2})(m - \sqrt{2}) = 0$
 $m > 1$ 이므로 $m = \sqrt{2}$ 이다.

※ 다른 풀이 1: 삼각형의 닮음

점 A의 좌표를 $(-a, 0)$ ($a > 0$)이라 하면 직선 AB의 기울기가 m ($m > 1$)이므로 점 B의 좌표는 $(0, am)$ 이다. 네 삼각형 AOB, BOC, COD, DOE는 모두 서로 닮음이다.

$$\begin{aligned} (\overline{OB})^2 &= \overline{OA} \times \overline{OC}, \quad a^2 m^2 = a \times \overline{OC} \text{이므로 } \overline{OC} = am^2 \\ (\overline{OC})^2 &= \overline{OB} \times \overline{OD}, \quad a^2 m^4 = am \times \overline{OD} \text{이므로 } \overline{OD} = am^3 \\ (\overline{OD})^2 &= \overline{OC} \times \overline{OE}, \quad a^2 m^6 = am^2 \times \overline{OE} \text{이므로 } \overline{OE} = am^4 \end{aligned}$$



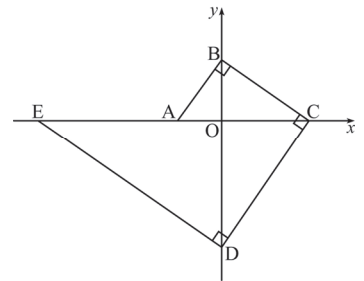
이후 풀이는 동일하다. 또한, 삼각함수를 이용해서 풀 수도 있다.

※ 다른 풀이 2: 삼각함수

$$\begin{aligned} \overline{OA} = k, \quad \angle OAB = \theta \text{라 하면 직선 AB의 기울기는 } \tan \theta \text{이다.} \\ \overline{OB} = k \tan \theta, \quad \overline{OC} = k \tan^2 \theta \\ \overline{OD} = k \tan^3 \theta, \quad \overline{OE} = k \tan^4 \theta \quad (\text{단, } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

따라서 세 선분 AO, OC, EA의 길이는 각각 $k, k \tan^2 \theta, k(\tan^4 \theta - 1)$ 이고, 이 순서대로 등차수열을 이루므로 등차중항을 이용하면 $2k \tan^2 \theta = k \tan^4 \theta$ 이다.

$2 = \tan^2 \theta$ 이므로 $\tan \theta = \sqrt{2}$ 이다. ($\because \tan \theta > 0$)
 따라서 직선 AB의 기울기는 $\sqrt{2}$ 이다.



06 05학년도 6월 평가원 나형 14번

답 : ㉔

1. $f\left(\frac{x}{4}\right) = \log_4 \frac{x}{4} = \log_4 x - \log_4 4 = f(x) - 1$ (X)

2. $f(2^n) = \log_4 2^n = n \log_4 2 = \frac{n}{2}$

$f(2^n)$ 은 n 에 관한 일차식이므로 수열 $\{f(2^n)\}$ 은 등차수열이다. 정확히 말하면 첫째항과 공차가 모두 $\frac{1}{2}$ 인 등차수열이다. (O)

3. $x > 1$ 일 때 $f(x) > 0$ 이다. 이때, $f(x) = t$ 라 하면 $t > 0$ 일 때 $f(t) > 0$ 을 따져주면 된다.
 $0 < t \leq 1$ 일 때 $f(t) \leq 0$ 이므로 $x > 1$ 일 때 항상 $f(f(x)) > 0$ 이 아니다. (X)

옳은 것은 ㉔뿐이다.

※ 선지 (㉔)은 부등식 $f(f(x)) > 0$ 의 해를 직접 찾아서 풀 수도 있다. $f(x) = t$ 로 치환하면 $f(t) > 0$ 이다. $f(t) > 0$ 의 해는 $t > 1$ 이다. 치환을 풀어주면 $f(x) > 1$ 이고 $f(x) > 1$ 의 해는 $x > 4$ 이다. 따라서 $x > 4$ 일 때, $f(f(x)) > 0$ 이다.

07 14년 3월 교육청 B형 28번

답 : 37

1. $S_n = \frac{n\{2a - 4(n-1)\}}{2} = (-2n + a + 2)n$

$S_n < 200$ 이므로 $(-2n + a + 2)n < 200$, $2n^2 - (a+2)n + 200 > 0$

n 에 관한 이차방정식 $2n^2 - (a+2)n + 200 = 0$ 이 실근을 갖지 않아야 한다. 이때, 판별식을 사용하여 안 된다. 자연수 n 에 관한 이차방정식이므로 $2x^2 - (a+2)x + 200 = 0$ 이 실근을 가지더라도 $2n^2 - (a+2)n + 200 = 0$ 은 실근을 갖지 않을 수 있기 때문이다.

2. 따라서 $f(n) = 2n^2 - (a+2)n + 200$ 이라 할 때, $f(n)$ 이 최소가 되게 하는 n 의 후보군을 정하여 각각에 대하여 $f(n) > 0$ 인지 확인해야 한다.

$2n^2 - (a+2)n + 200 = 2\left(n - \frac{a+2}{4}\right)^2 - \frac{(a+2)^2}{8} + 200$ 이므로 $f(n)$ 이 최소가 되게 하는 n 은

$\frac{a}{4}, \frac{a+1}{4}, \frac{a+2}{4}, \frac{a+3}{4}$ 중의 하나이다. $\frac{a+2}{4}$ 가 자연수라면 $f(n)$ 이 최소가 되게 하는 n 은

$\frac{a+2}{4}$ 이지만 $\frac{a+2}{4}$ 가 자연수가 아닐 수도 있으므로 4개의 후보가 생기는 것이다.

($f(n)$ 이 최소가 되게 하는 n 은 $\frac{a+1}{4}, \frac{a+2}{4}, \frac{a+3}{4}, \frac{a+4}{4}$ 중의 하나라고 해도 좋다. 또한, 이차함수는 대칭성이 있으므로 $\frac{a}{4}, \frac{a+1}{4}, \frac{a+2}{4}$ 중의 하나라고 해도 좋다. 어차피 결과는 같다.)

3. $f\left(\frac{a}{4}\right) > 0, f\left(\frac{a+1}{4}\right) > 0, f\left(\frac{a+2}{4}\right) > 0, f\left(\frac{a+3}{4}\right) > 0$ 을 모두 만족시키는 a 의 범위를 구하자.

$$f\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{(a+2)^2}{8} + 200 > 0 \text{에서 } (a+2)^2 < 1604 \text{이다.}$$

$$f\left(\frac{a+1}{4}\right) = \frac{1}{8} - \frac{(a+2)^2}{8} + 200 > 0 \text{에서 } (a+2)^2 < 1601 \text{이다.}$$

$$f\left(\frac{a+2}{4}\right) = -\frac{(a+2)^2}{8} + 200 > 0 \text{에서 } (a+2)^2 < 1600 \text{이다.}$$

$$f\left(\frac{a+3}{4}\right) = \frac{1}{8} - \frac{(a+2)^2}{8} + 200 > 0 \text{에서 } (a+2)^2 < 1601 \text{이다.}$$

a 는 자연수이므로 $(a+2)^2 < 1600$ 이어야 한다. 따라서 $-40 < a+2 < 40$ 이므로 자연수 a 의 최댓값은 37이다.

※ 이 문제를 쉽게 풀려면 방정식에 주목하지 않으면 된다.
(산술평균) \geq (기하평균)을 이용해보고, 다음 페이지를 보자.

$$2n^2 - (a+2)n + 200 > 0, 2n^2 + 200 > (a+2)n \text{이다.}$$

$$n \text{이 자연수이므로 양변을 } n \text{으로 나누면 } 2n + \frac{200}{n} > a+2 \text{이다.}$$

$$\text{여기서 } 2n > 0, \frac{200}{n} > 0 \text{이므로 (산술평균)} \geq \text{(기하평균)임을 이용하면 } 2n + \frac{200}{n} \geq 40 \text{이다.}$$

$$\text{(단, 등호는 } 2n = \frac{200}{n} \text{일 때 성립)}$$

따라서 $40 > a+2, 38 > a$ 이므로 자연수 a 의 최댓값은 37이다.

comment

산술평균과 기하평균을 생각하는 것이 어려울 수 있다. 따라서 ‘실수에 관한 부등식이 아닌 경우 산술평균과 기하평균의 관계를 적용해볼 수도 있겠다.’ 정도만 알아둬도 좋다.

08 09년 7월 교육청 나형 7번

답 : ③

원의 반지름을 r 이라 하면 $A_k = \frac{1}{2}r^2\theta_k$ 이다. 수열 $\{\theta_n\}$ 이 등차수열을 이루므로 A_1, A_2, \dots, A_n 또한 등차수열을 이룬다.

$$\sum_{k=1}^n \theta_k = 2\pi \text{ 이므로 } \sum_{k=1}^n A_k = A \text{이다.}$$

$$A_1 + A_n = \frac{1}{5}A \text{ 이므로 } \sum_{k=1}^n A_k = \frac{n(A_1 + A_n)}{2} = \frac{n}{2} \times \frac{1}{5}A = A$$

$$\frac{n}{10} = 1 \text{ 이므로 } n = 10 \text{이다.}$$

09 11학년도 6월 평가원 나형 25번

답 : 27

1. 첫째항이 16이고 공비가 $2^{\frac{1}{10}}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 을 구하면

$$a_n = 16 \times \left(2^{\frac{1}{10}}\right)^{n-1} = 2^{4 + \frac{n-1}{10}} \text{이다.}$$

$$\log a_n = \log 2^{4 + \frac{n-1}{10}} = \left(4 + \frac{n-1}{10}\right) \log 2 \text{에서 } \log 2 = 0.301 \text{이므로}$$

$$\log a_n = \left(4 + \frac{n-1}{10}\right) \times 0.301 = 1.204 + (n-1) \times 0.0301 \text{이다.}$$

따라서 $0 \leq 0.204 + (n-1) \times 0.0301 < 1$ 일 때

$\log a_n$ 의 소수 부분은 $b_n = 0.204 + (n-1) \times 0.0301$ 이다.

2. 따라서 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{k-1}, b_k, b_{k+1} + 1$ 은 순서대로 첫째항이 0.204, 공차가 0.0301인 등차수열을 이룬다.

이때, $b_{k+1} + 1$ 이 특이하다. $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{k-1}, b_k, b_{k+1} + 1$ 이 순서대로 등차수열을 이루기 위해서는 $b_k + 0.0301 = b_{k+1} + 1$ 이어야 하고

이를 위해서는 $0.204 + \{(k)-1\} \times 0.0301 < 1$, $0.204 + \{(k+1)-1\} \times 0.0301 \geq 1$ 을 만족시켜야 한다.

따라서 $p_n = 0.204 + (n-1) \times 0.0301$ 이라 할 때 $p_k < 1$ 이고 $p_{k+1} \geq 1$ 인 자연수 k 의 값을 구하자.

$$p_k = 0.204 + (k-1) \times 0.0301 < 1 \text{에서 } k < 1 + \frac{1-0.204}{0.0301} = 1 + \frac{0.796}{0.0301} = 1 + \frac{7960}{301} = 27. \dots$$

$$p_{k+1} = 0.204 + k \times 0.0301 \geq 1 \text{에서 } k \geq \frac{1 - 0.204}{0.0301} = \frac{0.796}{0.0301} = \frac{7960}{301} = 26. \dots$$

따라서 $26. \dots \leq k < 27. \dots$ 이고 k 는 자연수이므로 $k = 27$ 이다.

comment

b_n 과 p_n 이 같은 식임에도 불구하고 $p_n = 0.204 + (n-1) \times 0.0301$ 을 새로 도입하는 이유는 b_n 은 소수 부분이므로 그 정의상 $0 \leq b_n < 1$ 이기 때문이다.

10 09년 4월 교육청 나형 21번

답 : 22

1. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_3 = 40$, $a_8 = 30$ 이므로 $5d = -10$, $d = -2$ 이다. $a_3 = a + 2d = a - 4 = 40$ 이므로 $a = 44$ 이다.

$$|a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}| = \left| \frac{n(a_2 + a_{2n})}{2} \right| \text{에서}$$

$$a_2 = 44 - 2 = 42, a_{2n} = 44 - 2(2n - 1) = -4n + 46 \text{이므로}$$

$$|a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}| = \left| \frac{n(a_2 + a_{2n})}{2} \right| = \left| \frac{n(-4n + 88)}{2} \right| = |n(-2n + 44)|$$

2. $|n(-2n + 44)|$ 이 최소가 되는 자연수 n 의 값을 구하자.
 $|n(-2n + 44)| \geq 0$ 이므로 $|n(-2n + 44)| = 0$ 일 때 최소이다.

$$n(-2n + 44) = 0, n(n - 22) = 0 \quad \therefore n = 22 \quad (\because n > 0)$$

따라서 $|a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}|$ 이 최소가 되는 자연수 n 의 값은 22이다.

11 18년 4월 교육청 나형 28번

답 : 26

1. 등차중항을 이용하면 $a_1 + a_3 = 2a_2$ 이다.

$$\text{따라서 (가)에서 } a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 = 159 \quad \therefore a_2 = 53$$

2. 등차중항을 이용하면 $a_{m-2} + a_m = 2a_{m-1}$ 이다.

$$\text{따라서 (나)에서 } a_{m-2} + a_{m-1} + a_m = 3a_{m-1} = 96 \quad \therefore a_{m-1} = 32$$

수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_2 + (m-3)d = a_{m-1}$ 에서 $(m-3)d = -21$ 이다.

3. $a_{m-1} = 32$ 인 자연수 m 에 대하여 $\sum_{k=1}^m a_k = 425$ 이다. a_2 와 a_{m-1} 의 값을 이용하여 $\sum_{k=1}^m a_k$ 의

$$\text{식을 작성하면 } \sum_{k=1}^m a_k = \frac{m(a_2 + a_{m-1})}{2} = \frac{m(53 + 32)}{2} = \frac{85m}{2} = 425$$

$$\therefore m = \frac{425}{85} \times 2 = 5 \times 2 = 10$$

$(m-3)d = -21$ 에서 $m = 10$ 이므로 $d = -3$ 이다. 따라서 $a_{11} = a_9 + 2d = 32 - 6 = 26$ 이다.

12 07년 3월 교육청 나형 22번

답 : 13

1. (가)에서 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 26$

(나)에서 $a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 134$

$$\begin{aligned} \text{(다)에서 } a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(a_2 + a_{n-1})}{2} \\ &= \frac{n(a_3 + a_{n-2})}{2} = \frac{n(a_4 + a_{n-3})}{2} = 260 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \frac{n(a_1 + a_n)}{2} + \frac{n(a_2 + a_{n-1})}{2} + \frac{n(a_3 + a_{n-2})}{2} + \frac{n(a_4 + a_{n-3})}{2} \\ &= \frac{n\{(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + (a_4 + a_{n-3})\}}{2} \\ &= \frac{n\{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n)\}}{2} = \frac{n(26 + 134)}{2} = 4 \times 260 \end{aligned}$$

$$80n = 4 \times 260 \quad \therefore n = 13$$

comment

‘처음 4개의 항, 마지막 4개의 항’을 보자마자 합이 같은 네 쌍을 이용하여 (다)의 $\sum_{k=1}^n a_k$ 를 표현해야 겠다고 생각해야 한다.

13 20학년도 수능 나형 15번

답 : ④

1. 그래프로 푸는 게 절대적으로 유리하다.

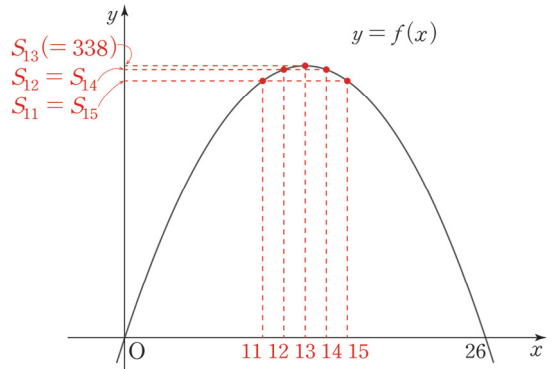
$$S_n = \frac{n\{2 \times 50 - 4(n-1)\}}{2} = (-2n + 52)n = -2n^2 + 52n = -2(n-13)^2 + 338$$

에서 $f(x) = -2(x-13)^2 + 338$ 이라 하면 $f(n) = S_n$ 이다.

2. $y = f(x)$ 의 그래프를 그려 $f(m) + f(m+1) + f(m+2) + f(m+3) + f(m+4)$ 의 값이 최대가 되는 자연수 m 의 값을 구하자.

이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 $x = 13$ 에 대하여 대칭이므로 $m = 11$ 일 때

$f(m) + f(m+1) + f(m+2) + f(m+3) + f(m+4)$ 의 값이 최대가 된다.



comment

$\sum_{k=m}^{m+4} S_k$ 의 값을 m 에 관한 식으로 표현하여 최대가 되게 하는 m 의 값을 구할 수도 있지만, 최상위권으로 도약하려면 그래프로 빠르게 해결하고 넘어갈 수 있어야 한다.

14 17년 3월 교육청 고2 나형 15번

답 : ⑤

1. 등비중항을 이용하자.

$$\frac{k}{a}, \frac{k}{b}, \frac{k}{12} \text{가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 } \left(\frac{k}{b}\right)^2 = \frac{k}{a} \times \frac{k}{12}, b^2 = 12a$$

이때, a, b 는 $a < b < 12$ 인 자연수이므로 $b^2 = 12a$ 을 만족시키는 a, b 의 값을 구할 수 있다. (만약 a, b 가 자연수라는 말이 없었다면 a, b 에 관한 또 다른 조건이 하나 더 필요했을 것이다.)

$b^2 = 2^2 \times 3 \times a$ 이므로 a 는 3을 인수로 가진다. 이때 $a > 3$ 이라면 $b > 12$ 가 되므로 조건을 만족시키지 못한다. 따라서 $a = 3, b = 6$ 이다.

2. $f(a) = \frac{k}{a} = \frac{k}{3} = 3$ 이므로 $k = 9$ 이다.

$$\therefore a + b + k = 3 + 6 + 9 = 18$$