2021 기대모의고사 출제 / 해설

김주한 (고려대학교 물리학과 16)
- 前) 강남대성학원 수학 컨텐츠 출제자

공개출판은 처음이지만 시중의 꽤 많은 컨텐츠에 출제 참여해온, 대치에 눌러살기 시작한 전문 수학 컨텐츠 제작자이다. 수험생활의 절박함을 항상 잊지 않고, 수학 컨텐츠는 결국 '점수를 올리기 위한 수단'이라는 생각으로 무엇보다 '실전적이고 실질적인 도움'을 줄 수 있는 컨텐츠를 만들어낼 수 있도록 노력하는 저자이다.

김기대 (고려대학교 수학과)
- 고려대, 서강대 등 5개교 수학과 논술 최초합격
- 매년 한양대, 인하대 등 이공대 수리논술 Final 마감 (입학처가 선정한 모범답안자 배출)
- 2016~2020 기대모의고사 저자

2021 6평 대비 기대모의고사 나형 빠른 정답					
1.	⑤	11.	④	21.	③
2.	③	12.	⑤	22.	27
3.	③	13.	④	23.	5
4.	④	14.	⑤	24.	7
5.	①	15.	②	25.	30
6.	②	16.	②	26.	40
7.	①	17.	③	27.	19
8.	④	18.	②	28.	12
9.	⑤	19.	①	29.	20
10.	③	20.	⑤	30.	245

출판물은 본 시험보다 수학1과 수학2 문항의 난이도가 어려워지고 출제의 다양화(ex.수열 킬러, 사인-코사인법칙 준킬러, 수학2 신유형 등등)가 이루어질 예정이며, 확통은 본 시험 수준으로 유지될 예정입니다.

〈2021 기대 모의고사 출판계획〉

Volume	출판시기	교재 컨셉	예상 1컷
Vol.1 가형/나형 4회분 Vol.2 가형/나형 3회분	7월 중	① 지난 4년간 검증된 우수한 문항들을 이번 교육과정의 목표에 맞도록 수정 ② 작년 수능과 올해 6평의 난이도를 최우선 반영하여 실전적인 모의고사를 지향	88~92
Vol.1, Vol.2는 17~20 기대모의고사, 오르비 컨텐츠의 문항들을 **새 교육과정에 맞게 수정/변형하여 수록**했습니다. 신문항 비율 40% (가형 기준) 이 두 모의고사에서는 '가르침' 보다 '실전력 강화'에 더 중점을 두었기 때문에, 작년 기대모의고사보다 풀기 편한 모의고사가 되었습니다.			
Vol.3 가형/나형 3회분	8월	① 6평의 문항 출제 트렌드(킬러 출제 단원, 준킬러 배치 및 위치 선정 등) 적극 반영 ② 기존 문제와 차원이 다르고 더 평가원스러운 2021 수특/수완 변형 문항 수록	88~92
올해 출제기조를 적용하기 위해 **Vol.3의 모든 문항은 6평 이후에 전부 새로 제작**되며 올해 EBS 수특/수완 우수문항을 적극적으로 반영합니다. 또한 새 저자의 영혼을 갈아넣은 문항들이 아주 많이 포함되기 때문에 Vol1, 2보다 좀 더 교훈적이고 의미 깊은 문제들이 수록되므로 수능 현장에서 맛볼 수 있는 낯설음과 긴장감을 미리 느껴볼 수 있을 것입니다.			

〈2021 기대 T 수리논술 현강 안내-이과〉

수업명	수강 추천대상	수업 컨셉	개강일
수리논술 정규반 (총 12강)	①수리논술 노베이스 ②논술준비 6개월↓ ③수리논술 탈락을 경험한(ㅠㅠ) 재수생	① 수리논술에 꼭 필요한 개념과 사고만 배웁니다. ② 수능과 논술의 사이에 있는 개념과 문제들을 이용하여 자연스럽게 수능에서 수리논술로 넘어갑니다. 따라서 논술 노베이스도 쉽게 따라올 수 있습니다. ③ 불안감을 증폭시키는 자극적인 내용은 No. 새 교육과정에서 나올 수 있는 Theme 만을 엄선하고 적합한 기출문제들을 풀기 때문에 최고의 효율을 선사합니다.	**대치오르비** 6/20(토) 오전9시 **대치 명인** 6/21(일) 오후14시
수리논술 고난도 문풀반 (총 10~12강)	①고난도 수리논술 출제학교 지원예정자 ②의예과 논술 노베	① 연세/한양/서강/이화/인하/홍익/아주 등 고난도 수리논술 지원 예정자들에게 필수! ② 특히 연세대는 다른 학교들보다 최대 60일 빠르게 시험보고, 한양대와 서강대는 수능 2일 뒤에 보기 때문에 준비할 시간이 없으므로, 미리 학교들의 고난도 기출문제를 풀어보는 수업	**대치오르비** 6/21(일) 오전9시
수능 전 Final (연세대 4~5회, 시립대 4회, 홍익대 4회) 은 고난도 문풀반 이후 진행됩니다. 오르비 칼럼글을 통해 공지드리겠습니다. 수능 후 Final (한양대, 인하대, 이화여대 등)은 10월 말 혹은 수능 직전 무료배포 모의고사에서 공지드리겠습니다.			

본 시험지는 2021학년도 6월 평가원 대비 문제지이며, 출판물 (2021 기대모의고사)에 포함되는 자료이므로 무단으로 문제를 사용 시 불이익이 있습니다.

1) 정답 : ⑤ 8

$2^6 \times 2^{-3} = 2^{6+(-3)} = 2^3 = 8$

2) 정답 : ③ 60

x가 4번, $\frac{2}{x^2}$이 2번 선택되면 되므로 ${}_6\mathrm{C}_4 \times x^4 \times \left(\frac{2}{x^2}\right)^2 = 60$이다.

3) 정답 : ③ -2

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+ax+2}{x-2} = b$에서 분모가 0으로 수렴하므로

분자도 0으로 수렴해야하고, 따라서 $2a+6=0$, $a=-3$이다.

또한 이 값을 극한에 대입한 후 분모, 분자에서 $x-2$를 나눠주면

$b=1$임을 알 수 있다. 따라서 $a+b=-2$이다.

4) 정답 : ④ 10

$\log ab = 3$에서 $ab = 10^3 = 1000$이고

$\log_2 a = \log_4 b$에서 $b = a^2$이다.

따라서 $a^3 = 1000$에서 $a=10$, $b=100$임을 알 수 있고,

$\frac{b}{a} = 10$이다.

5) 정답 : ① $\frac{1}{5}$

$y = x^3 - x^2 + 4x$, $y' = 3x^2 - 2x + 4$이므로 점 $(1,\ 4)$에서 그은 접선의 기울기는 5이다. 따라서 접선의 방정식은 $y = 5x - 1$ 이므로

x절편은 $\frac{1}{5}$이다.

6) 정답 : ② 35

등차수열의 성질에 의하여 $a_2 + a_6 = 2a_4 = 10$이다. 따라서

$\sum_{k=1}^{7} a_k = (a_1+a_7)+(a_2+a_6)+(a_3+a_5)+a_4 = 10+10+10+\frac{10}{2} = 35$

7) 정답 : ① $\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A|B) = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{P}(B) = 2\mathrm{P}(A \cap B)$이고

$\frac{\mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)} = 2$에서 $\mathrm{P}(B) = 2\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\mathrm{P}(A) = 3\mathrm{P}(A \cap B)$이다.

따라서 $\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{1}{3}$이다.

8) 정답 : ④ 3

$f(x) = f(-x)$이므로 $\lim_{x \to -2-} f(x)$에서 $x=-t$로 치환하면

$\lim_{x \to -2-} f(x) = \lim_{t \to 2+} f(-t) = \lim_{t \to 2+} f(t) = 2$임을 알 수 있고

$\lim_{x \to 1-} f(x) = 1$이다. 따라서 $\lim_{x \to -2-} f(x) + \lim_{x \to 1-} f(x) = 3$

9) 정답 : ⑤ $\frac{13}{18}$

$a^b \le 4$일 확률을 구한 후 1에서 빼주도록 하자.

$a=1$일 때, b에 관계없이 모두 성립한다.

$a=2$일 때, $b=1$, $b=2$ 인 경우만 가능하다.

$3 \le a \le 4$일 때, $b=1$인 경우만 가능하므로,

총 경우의 수는 $6+2+2=10$이다.

따라서, $a^b \le 4$일 확률은 $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$이므로

정답은 그 여사건의 확률인 $1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$이다.

10) 정답 : ③ -3

부등식 $x^4 - 4x \ge k$를 만족시켜야 한다.

함수 $y = x^4 - 4x$의 도함수는 $y' = 4x^3 - 4$이므로

함수 $y = x^4 - 4x$는 $x=1$에서 극솟값이자 최솟값 -3을 갖는다.

따라서 $-3 \ge k$을 만족시켜야 하므로 k의 최댓값은 -3이다.

11) 정답 : ④ 64

$a_3 a_5 = (a_4)^2$이므로 $a_4 = 1$.

또한 $\sum_{n=1}^{8} \log_2 a_n = \log_2 (a_1 a_2 \ldots a_8) = 3$이므로 $a_1 a_2 \ldots a_8 = 8$.

그런데 $a_1 a_7 = a_2 a_6 = a_3 a_5 = (a_4)^2$이므로

$a_1 a_2 \ldots a_8 = (a_4)^7 \times a_8$이다. 따라서 $a_8 = \frac{8}{1^7} = 8$.

$a_4 = 1$, $a_8 = 8$이므로 공비를 r라 하면 $r^4 = 8$.

따라서 $a_{12} = a_4 \times r^8 = 8^2 = 64$

본 시험지는 2021학년도 6월 평가원 대비 문제지이며, 출판물 (2021 기대모의고사)에 포함되는 자료이므로 무단으로 문제를 사용 시 불이익이 있습니다.

12) 정답 : ⑤ 4

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(3)}{x-1}=2$의 분모가 0으로 가므로 분자도 0으로 간다.

따라서 $f(1)=f(3)$이므로 $f(x)=a(x-2)^2+b$로 두자.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(3)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2$이고

$f'(x)=2a(x-2)$이므로 $f'(1)=2$에서 $-2a=2$, $a=-1$이다.

따라서 $f'(x)=-2(x-2)$로부터 $f'(0)=4$이다.

13) 정답 : ④ 176

$\sum_{k=1}^{11}(k\times|k-10|)$

$=11\times|11-10|+\sum_{k=1}^{10}\{k\times(10-k)\}$

$=11+(550-385)\ \left(\because \sum_{k=1}^{10}k=55,\ \sum_{k=1}^{10}k^2=385\right)$

$=176$

14) 정답 : ⑤ $\frac{1}{2}$

점 A와 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하자.

$\overline{PB}=2\overline{PA}$이므로 $\overline{BB'}=2\overline{AA'}$($\because\triangle PAA'$, $\triangle PBB'$은 AA닮음)

이고, 두 점 A와 B는 곡선 $y=\log_3 x$ 위의 점이므로

점 A의 x좌표를 a $(0<a<5)$라 하면 점 B의 x좌표는 a^2이다.

또한 $\overline{PB'}=2\overline{PA'}$이므로 $a^2-5=2(5-a)$이고

$a^2+2a-15=0$, $a^2+2a-15=0$, $(a+5)(a-3)=0$이므로

$a=3$이다.

따라서 점 B의 좌표가 B(9, 2)이므로 $y=m|x-5|$에서 $2=4m$이고, $m=\frac{1}{2}$이다.

15) 정답 : ② 19

i) 이 주머니에서 0이 적힌 카드를 골랐을 때

0이 적힌 카드 1장, 1이 적힌 카드 2장, 2이 적힌 카드 1장을 갖고 있으므로

네 장의 카드를 임의로 배열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}$이고 네 자리 자연수를 만들어야 하기 때문에 첫 번째 자리에 0이 오는 경우의 수 $\frac{3!}{2!}$만큼을 빼주면

전체 경우의수 $\frac{4!}{2!}-\frac{3!}{2!}=9$를 구할 수 있다.

ii) 이 주머니에서 1이 적힌 카드를 골랐을 때

1이 적힌 카드 3장, 2이 적힌 카드 1장을 갖고 있으므로

전체 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$이다.

iii) 이 주머니에서 2가 적힌 카드를 골랐을 때

1이 적힌 카드 2장, 2이 적힌 카드 2장을 갖고 있으므로

전체 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$이다.

따라서 세 가지 각각의 경우의 수를 모두 더하면 총 19가지이다.

16) 정답 : ② 10

수열의 귀납적 정의 문제는, 문제의 조건에 맞게 잘 나열하는 게 상책이다. 다만 $n\geq5$부터는 $\{a_n\}$이 부분적으로 공비가 2인 등비수열을 이룬다는 것은 눈치채주자.

$a_2=-a_1-5=-7$

$a_3=a_2-5=-12$

$a_4=-a_3-5=7$

$a_5=a_4-5=2$

이므로 $\sum_{k=1}^{5}a_k=(2)+(-7)+(-12)+(7)+(2)=-8$이고,

$a_6=2\times2$, $a_7=2\times2\times2$ ⋯ 에서

$a_n=2^{n-4}$ (단, $n\geq6$) 이므로

$\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=6}^{m}a_k=(-8)+(4+8+\cdots+2^{m-4})>53$,

$4+8+\cdots+2^{m-4}>61$인 m을 찾아주면 된다.

$4+8+16+32=60<61$, $4+8+16+32+64=124>61$이므로

$m-4=6$, $m=10$일 때 처음으로 문제의 부등식을 만족시킨다.

따라서 정답은 10이다.

본 시험지는 2021학년도 6월 평가원 대비 문제지이며, 출판물 (2021 기대모의고사)에 포함되는 자료이므로 무단으로 문제를 사용 시 불이익이 있습니다.

17) 정답 : ③ 3

점 P는 $t<3$일 땐 꾸준히 왼쪽으로 운동하다가
$t>3$일 땐 꾸준히 오른쪽으로 운동한다.

점 Q는 $t<3$일 땐 꾸준히 오른쪽으로 운동하다가
$t>3$일 땐 꾸준히 왼쪽으로 운동한다.

따라서 이 경우 점 P는 Q보다 오른쪽에 있어야만 두 점이 영원히 만나지 않을 수 있음을 알 수 있다.
(문제 조건에 대한 의문 해결!)

또한 두 점 P, Q가 제일 가까워지는 시각은 $t=3$일 때임을 알 수 있다.

$0\le t\le 3$일 때 점 P가 이동한 거리는 왼쪽으로
$\int_0^3 |t^2-2t-3|dt = 9$이고
$0\le t\le 3$일 때 점 Q가 이동한 거리는 오른쪽으로
$\int_0^3 |-at^2+3at|dt=\frac{9a}{2}$이므로 $9+\frac{9a}{2}<27$에서 $a<4$이다.
따라서 가능한 자연수 a의 개수는 3이다.

18) 정답 : ② $\frac{40}{3}$

<(가) 해석>
$ab<6$를 만족시키는 자연수 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(5,\ 1),\ (4,\ 1),\ (3,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 1),$
$(1,\ 5),\ (1,\ 4),\ (1,\ 3),\ (1,\ 2),\ (1,\ 1)$

로 총 10개이고, $(5,\ 1),\ (1,\ 5)$일 때 $a+b$는 최댓값 6을 갖는다.
따라서 $p=6$이다.

$a+b$의 최댓값이 6이고, 문제 조건에서 n은 7 이상의 자연수이기 때문에 자연스럽게 $a+b\le n$를 항상 만족시킬 수밖에 없음을 확인하자.

<(나) 해석>
$a,\ b$는 자연수이고, c는 음이 아닌 정수이므로
$a=a'+1,\ b=b'+1$로 두면 $a+b+c=a'+b'+c+2=n$에서
$a'+b'+c=n-2$이다.
이를 만족시키는 순서쌍 $(a',\ b',\ c)$의 개수는
${}_3\mathrm{H}_{n-2}={}_n\mathrm{C}_{n-2}={}_n\mathrm{C}_2$이다. $\therefore f(n)=\frac{n(n-1)}{2}$

<(다) 해석>
조건부확률에 의하여

$g(n)=\frac{10}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{20}{n(n-1)}$이다.

(10은 $ab<6$를 만족시키는 자연수 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 뜻한다.)

따라서 $f(p+2)\times g(p+1)=f(8)\times g(7)=28\times\frac{10}{21}=\frac{40}{3}$이다.

출제자의 한마디
보통 '확률에서는 중복조합을 쓰면 안된다.' 는 말을 많이 들었을 것이다. 하지만, 각각 근원사건의 확률이 같은 경우, 중복조합으로 구한 경우의 수로도 확률을 구할 수 있다.
근원사건이 기대되는 정도가 같은 경우, 어떤 방법을 쓰든 상관이 없다.

19) 정답 : ① 108

자연수 a를 b로 나눈 몫과 나머지는 유일하게 결정된다.
예를 들면, $14=4\times3+2$이므로 몫과 나머지는 각각 3, 2 이다.
$14=4\times2+6$으로도 표현은 되지만, 몫과 나머지를 2, 6이라고는 하지 않는다. 나머지는 $b(=4)$보다 작은 음이 아닌 정수여야 하기 때문이다.

이를 거꾸로 말하면, 몫과 나머지를 정하면 그 수가 역으로 결정된다는 것과 같다. 예를 들어, 4로 나눈 몫과 나머지가 각각 3, 2인 수는 14이다. 이 14를 다른 (몫, 나머지) 순서쌍으로 표현할 수 없기 때문에 몫과 나머지를 정하는 것과 그 수를 정하는 것은 정확히 일대일대응이 된다. 이러한 기본 생각을 갖고 문제에 접근해보자.

(나) 조건에 의하면

4로 나눈 나머지가 될 수 있는 0, 1, 2, 3 들의 합으로 2를 만드는 $x,\ y,\ z$의 집합은 $\{0,\ 1,\ 1\},\ \{2,\ 0,\ 0\}$뿐이다.

1) $\{0,\ 1,\ 1\}$인 경우
$x=4a,\ y=4b+1,\ z=4c+1$ 라 두자.
(여기서 a는 자연수, $b,\ c$는 음이 아닌 정수이다. a만 자연수인 이유는 $x,\ y,\ z$가 자연수여야 하는데 x엔 나머지가 없어서 몫이 자연수여야 하기 때문이다.)
이렇게 구한 경우의 수에 나머지가 0일 문자를 $x,\ y,\ z$ 중 골라주는 ${}_3\mathrm{C}_1$을 곱하면 된다.

따라서 $4a+(4b+1)+(4c+1)=26$ (a는 자연수, $b,\ c$는 음이 아닌 정수)를 만족하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하자.
$4a+(4b+1)+(4c+1)=26$에서 $4(a+b+c)=24$이고

본 시험지는 2021학년도 6월 평가원 대비 문제지이며, 출판물 (2021 기대모의고사)에 포함되는 자료이므로 무단으로 문제를 사용 시 불이익이 있습니다.

$a+b+c=6$이므로 이를 만족하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_{6-1}=21$이다.

따라서 1)의 경우의 수는 총 $21\times3=63$이다.

2) $\{2,\ 0,\ 0\}$인 경우

$x=4X+2,\ y=4Y,\ z=4Z$
(X는 음이 아닌 정수, $Y,\ Z$는 자연수)
로 두고, 마찬가지로 이렇게 구한 경우의 수에 나머지가 2일 문자를 x, y, z 중 골라주는 ${}_3\mathrm{C}_1$을 곱하면 된다.

1)에서와 마찬가지의 논리로
$X+Y+Z=6$ (X는 음이 아닌 정수, $Y,\ Z$는 자연수)를 만족하는 순서쌍 $(X,\ Y,\ Z)$의 개수를 구하면 ${}_3\mathrm{H}_{6-2}=15$이다.

따라서 2)의 모든 경우의 수는 $15\times3=45$이다.

1)과 2)에 의해, 총 경우의 수는 $45+63=108$이다.

출제자의 한마디
$x+y+z=26$이고, 26은 4로 나눈 나머지가 2이므로 (나) 조건이 꼭 필요한 것이냐고 묻는 학생들이 있을 수 있다. 하지만 $x+y+z$를 4로 나눈 나머지는 2가 아닌 6이 될 수 도 있다. $(x,\ y,\ z)=(11,\ 11,\ 4)$를 확인해보면 나머지의 합이 6이다. 하지만 이를 더한 $x+y+z$의 나머지는 4 이상이 되면 안되므로 이 6을 다시 한 번 4로 나눠서 나머지 2를 맞춰 주는 것이다.

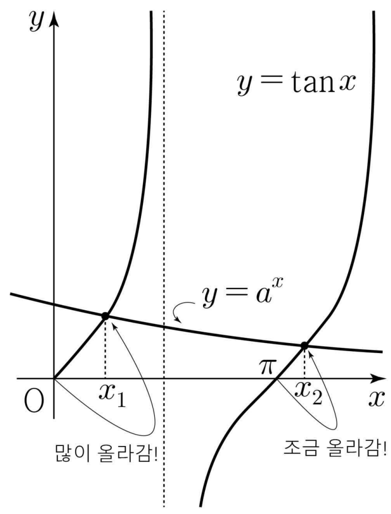
20) 정답 : ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ.
두 곡선 $y=a^x\cos x(0\le x\le 2\pi)$, $y=\sin x$의 교점의 x좌표 $x_1,\ x_2$는 다음 방정식의 해이다.

$$a^x\cos x=\sin x \quad\Rightarrow\quad a^x=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$$

따라서 $x_1,\ x_2$는 두 곡선 $y=a^x,\ y=\tan x\ (0\le x\le 2\pi,\ \cos x\ne 0)$의 두 교점의 x좌표와 같으므로 $a^{x_1}=\tan x_1$이다. (참)

ㄴ.



$0<a<1$이므로 $0<x<2\pi$인 모든 실수 x에 대하여 $0<a^x<1$이다. 따라서 $a^{x_1}=\tan x_1<1=\tan\frac{\pi}{4}$이므로 $0<x_1<\frac{\pi}{4}$이다.

(참)

ㄷ.
먼저, 문제에 등장하는 $y_1,\ y_2$는 위 그림에 찍힌 두 점의 y좌표가 아님에 유의하자.

ㄴ으로부터 $0<x_1<\frac{\pi}{4}$임을 알았고, 위 그림으로부터
$\pi<x_2<x_1+\pi$임을 알 수 있다.
$y_2=\sin x_2$의 값이 음수임을 부등식 $\pi<x_2$으로부터 알 수 있고,
$y_1=\sin x_1$의 절댓값이 $y_2=\sin x_2$의 절댓값보다 큼을
부등식 $x_2<x_1+\pi$으로부터 알 수 있다.

그런데 $0<x_1<\frac{\pi}{4}$이므로 $\sin x_1=y_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$이고

$|\sin x_2|=|y_2|<|y_1|<\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$-\frac{\sqrt{2}}{2}<y_2,\ -y_2<\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

따라서 $y_1-y_2<\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$이다. (참)

21) 정답 : ③ 18

문제에서 구하려는 것이 사각형 ABCD의 둘레이므로, 네 변을 모두 구해야할 것 같다.
먼저 눈에 띄는 것은 선분 AB. 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{AB}}=5$이다. 여기서 $\angle\mathrm{ABP}=\theta$라 하면 $\cos\theta=\frac{4}{5}$, $\sin\theta=\frac{3}{5}$이고 $\angle\mathrm{ABC}=90^\circ+\theta$이다.

길이 정보와 각 정보가 있는 삼각형 ABC 부터 보자. 삼각형 ABC의 외접원 O의 반지름의 길이는 $\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$이므로

본 시험지는 2021학년도 6월 평가원 대비 문제지이며, 출판물 (2021 기대모의고사)에 포함되는 자료이므로 무단으로 문제를 사용 시 불이익이 있습니다.

사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(90^\circ+\theta)}=5\sqrt{2}$임을 알 수 있다.

$\sin(90^\circ+\theta)=\cos\theta$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=4\sqrt{2}$이다.
또한 $\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{PBC}=90^\circ$ 이므로 점 A에서 선분 BC의 연장선에 수선의 발 H를 내려 삼각형 AHC에서 피타고라스 정리를 사용하면 $\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-4^2}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=4-3=1$임을 알 수 있다.

한편 사각형 ABCD는 원에 내접한 사각형이므로
$\angle\mathrm{ADC}=180^\circ-\angle\mathrm{ABC}=90^\circ-\theta$이다.

사각형 ABCD의 둘레의 길이를 구해야 하므로 $\overline{\mathrm{DC}}=a$, $\overline{\mathrm{DA}}=b$라 하자.
a, b를 각각 구할 수 있다면 좋겠지만 우리의 목표는 $a+b$를 구하는 것이므로 이를 통째로 구해야 할 수 도 있겠다는 생각을 반드시 갖고 있어야 한다.

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여
$a^2+b^2-2ab\times\cos(90^\circ-\theta)=32$이므로
$a^2+b^2-\dfrac{6}{5}ab=32$ 이다. ⋯ ①

또한 (다) 조건에 의하여 $\dfrac{1}{2}ab\sin(90^\circ-\theta)=14$, $ab=35$이다. ⋯ ②

①에 ②를 적용하면 $a^2+b^2=74$, $ab=35$이다. 이 둘을 연립하면 a, b를 $(5, 7)$ 따위로 구할 수 있겠으나 앞서 말했듯이 문제의 목표는 둘레의 길이를 구하는 것이므로 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ 공식을 활용해주는 것이 좋은 센스이다.

$(a+b)^2=74+70=144$로부터 $a+b=12$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{BC}}=1$
이므로 정답은 $12+5+1=18$ 이다.

22) 정답 : 27

${}_3\Pi_3=3^3=27$

23) 정답 : 5

곡선 $y=2^{x+2}-a$ 위의 점 중 y축 위에 있는 점 $(0,\ 4-a)$을 생각해보면, 우상향하는 지수함수 그래프의 특성상 이 점이 $y<0$인 영역에 포함되어야 제2사분면을 제외한 모든 사분면을 지날 수 있다.
따라서 $4-a<0$에서 자연수 a의 최솟값은 5이다.
(참고) x, y축은 어느 사분면에도 포함되지 않는다.

24) 정답 : 7

$f'(x)=3x^2-2ax+2a$이고, $f'(x)$의 부호변화가 있으면 안 되므로 이차함수 $f'(x)$의 근은 1개 이하여야 한다.
따라서 판별식을 통해 $D/4=a^2-6a\le 0$을 만족해야 하므로
$0\le a\le 6$ 이고, 정수 a의 개수는 7개 이다.

25) 정답 : 30

꺼낸 공에 1이 적힌 공이 있는 사건을 A,
꺼낸 공에 6이 적힌 공이 있는 사건을 B 라 하자.

A 또는 B일 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$로

구할 수 있다. 따라서 $p=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_1-{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$,

$50p=30$이다.

26) 정답 : 40

$x^3-x^2-x+1=(x^2-1)(x-1)=(x-1)^2(x+1)$이므로
곡선 $y=x^3-x^2-x+1$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는
$\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{1}=-\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3}$
이다. 따라서 $30S=40$이다.

27) 정답 : 19

$f(1)=9f'(0)$이므로 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+ax+b}{x-1} & (x\neq 1)\\ 9f'(0) & (x=1)\end{cases}$$

이다. $x=1$에서의 연속성을 이용하여 a, b를 구하자.
$f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 $\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=9f'(0)$, 즉

$\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax+b}{x-1}=9f'(0)$이다.
분모가 0으로 가기 때문에 분자도 0으로 가야 하므로
$a+b+1=0$, $b=-a-1$이다. 이를 대입하면 극한식은

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax-1-a}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1+a)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}(x^2+x+1+a)=3+a=9f'(0)\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. ⋯ ①

한편 (가)의 항등식에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=-b=a+1$을 얻을 수 있고, 항등식 양변을 미분한 후 $x=0$을 대입하면

본 시험지는 2021학년도 6월 평가원 대비 문제지이며, 출판물 (2021 기대모의고사)에 포함되는 자료이므로 무단으로 문제를 사용 시 불이익이 있습니다.

$f(0)=f'(0)+a$ 이다. 따라서 $f'(0)=1$이다.
다시 이를 ①에 대입하면 $3+a=9f'(0)=9$에서 $a=6$이고, $b=-7$이므로

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+6x-7}{x-1} & (x\neq 1) \\ 9f'(0) & (x=1) \end{cases}$$

이다. 따라서 $f(3)=\dfrac{27+18-7}{2}=19$이다.

28) 정답 : 12

곡선 $y=6\sin(nx)$와 직선 $y=n$의 교점에 대하여 n의 범위를 나누어 생각해 보자.

1) $n<6$일 때
$nx=t$로 치환하면, 본 문제에서 원하는 값은 $0\le t\le 2n\pi$에서 $6\sin t=n$을 만족하는 t값의 합에 $\dfrac{1}{n}$을 곱해준 값과 같다. (단순 치환)

$n=1$일 때, 교점이 2개가 나오는데 대칭성에 의해 t값의 총합은 π이다.
$n=2$일 때, 교점이 4개가 나오는데 대칭성과 주기성 (3, 4번째 교점의 x좌표는 은 1, 2번째 교점들의 x좌표에 비해 각각 2π씩 큼) 에 의해 t값의 총합은 $\pi+(\pi+4\pi)$이다.
마찬가지 방식으로 $n=k$ (단, $1\le k\le 5$) 일 때,
t값의 총합은 $\sum_{i=1}^{k}(\pi+4(i-1)\pi)=2\pi k^2-\pi k$이다.
이때 x값의 총합은 $2\pi k-\pi$이고 이 값이 6π 이하여야 하므로 가능한 k는 $k=1,\ 2,\ 3$뿐이다.

2) $n=6$일 때,
$6x=t$로 치환하면, 본 문제에서 원하는 값은 $0\le t\le 12\pi$ 에서 $6\sin t=6$, 즉 $\sin t=1$을 만족하는 t를 모두 더한 후 $\dfrac{1}{6}$을 곱해주면 모든 교점의 x좌표들의 합을 구할 수 있다.

$$t=\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}+2\pi,\ \frac{\pi}{2}+4\pi,\ \cdots,\ \frac{\pi}{2}+10\pi$$

이고 이 모든 t값의 총합은 33π이고, 이를 6으로 나누면 모든 x좌표의 합이다. 따라서 이 경우 역시 모든 x좌표의 합인 $\dfrac{33}{6}\pi=\dfrac{11}{2}\pi$가 6π 이하이므로 $n=6$일 때도 성립한다.

3) $n>6$일 때, 곡선 $y=6\sin(nx)$와 직선 $y=n$의 교점이 존재하지 않는다.

따라서, 가능한 모든 n은 $n=1,\ 2,\ 3,\ 6$이고 이들의 합은 12이다.

29) 정답 : 20

'총합이 8 이상일 때, 빨간 공을 적어도 하나 골랐을 확률'은 1에서 '총합이 8 이상일 때, 파란 공만 골랐을 확률'을 빼서 구할 수 있다(여사건의 확률). 따라서 총합이 8 이상일 때 파란 공만 골랐을 확률을 구하자.

먼저 8개의 공 중 3개의 공을 꺼냈을 때, 꺼낸 공에 적혀있는 숫자의 '총합이 8 이상일 경우의 수'를 구하기 위해, 그 여사건인 '총합이 8 미만일 경우의 수'를 구하자.

총합이 8 미만인 모든 경우는 공의 조합이

(1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 3), (2, 2, 3)

이 되도록 고른 경우이다. 이 경우들에서는 색깔을 정하지 않은 상태이므로, 색을 결정시켜주면 케이스에서 나올 수 있는 경우의 수는 각각

$(1\times1\times1)$, $(1\times2\times2)$, $(1\times2\times2)$, $(1\times1\times1)$, $(1\times1\times2)$

이므로 총합이 8 미만인 모든 경우의 수는 $1+4+4+1+2=12$가지이다.

따라서 8개의 공 중 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_8C_3=56$이므로 총합이 8 이상일 경우의 수는 $56-12=44$이다.

이제 8개의 공 중 3개의 공을 꺼냈을 때, 꺼낸 공에 적혀있는 숫자의 '총합이 8 이상이면서 파란공만 뽑을 경우의 수'를 구하자.

파란공만 뽑을 경우의 수는 ${}_5C_3=10$이고,
그 중 총합이 8 미만이 되는 경우는

(1, 2, 3), (1, 2, 4)

2가지가 있으므로, '총합이 8 이상이면서 파란공만 뽑을 경우의 수'는 $10-2=8$가지이다.

따라서 '총합이 8 이상일 때, 파란 공만 골랐을 확률'은
$\dfrac{{}_5C_3-2}{{}_8C_3-12}=\dfrac{8}{44}=\dfrac{2}{11}$이므로 그 여사건의 확률인
'총합이 8 이상일 때, 빨간 공을 적어도 하나 골랐을 확률'은
$1-\dfrac{2}{11}=\dfrac{9}{11}$이고, $p+q=20$이다.

본 시험지는 2021학년도 6월 평가원 대비 문제지이며, 출판물 (2021 기대모의고사)에 포함되는 자료이므로 무단으로 문제를 사용 시 불이익이 있습니다.

30) **정답** : 245

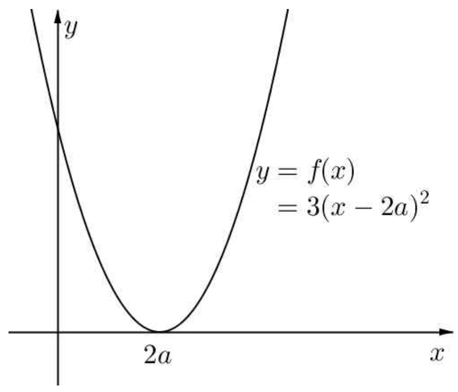
$g(a)=0$, $g(0)=0$이고 $g'(x)=(x-a)f(x)+\int_0^x f(t)dt$으로부터

$g'(a)=\int_0^a f(t)dt$, $g'(0)=-af(0)$이다.

즉, 곡선 $y=g(x)$가 두 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ 0)$을 지난다는 것은 확실하나 그 점들에서 극대 또는 극소가 될지, 아니면 평범하게 x축을 관통하는 그래프를 나타낼지는 $f(x)$에 따라 달라진다.

(가)조건을 만족하는 $f(x)$의 케이스를 나눠보도록 하자.

i) $f(x)=3(x-2a)^2$ (양의 실수를 중근으로 가질 때)



이 경우, $f(x)$의 부호가 음이 아니므로

$\int_0^a f(t)dt>0$, $f(0)>0$임을 알 수 있다.

따라서 $g'(a)>0$, $g'(0)<0$

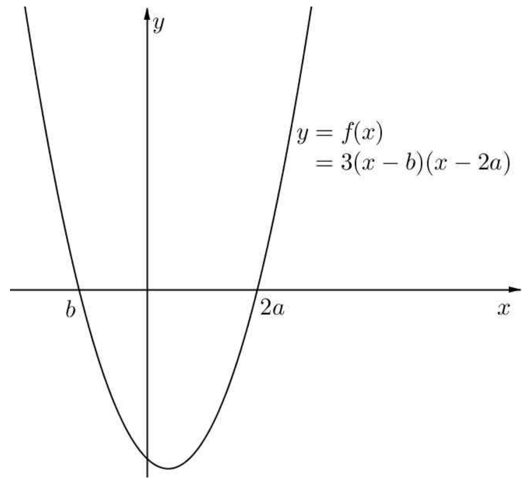
즉, $x=0$, a에서 방정식 $g(x)=0$은 중근을 가지지 않으므로 $g(x)=x(x-a)(x-b)^2$꼴로 표현되어야 (나)조건을 만족시킬 수 있다. (단, $b\neq 0$, a)

하지만

$$g(x)=(x-a)\int_0^x f(t)dt=(x-a)\left[(t-2a)^3\right]_0^x=(x-a)((x-2a)^3+8a^3)$$

에서, $(x-2a)^3+8a^3=x(x-b)^2$을 만족시키는 b는 존재하지 않음을 알 수 있다. (추가설명 : 두 식을 전개하여 항등식이 되기 위한 조건을 적용하면 $a=b=0$이 나오는데, 이는 $a>0$이라는 점과 $b\neq a$라는 점에 모순이다.)

ii) $f(x)=3(x-b)(x-2a)$ (단, $b<0$)
($f(x)=0$이 음의 실근 하나와 양의 실근 하나를 가질 때)

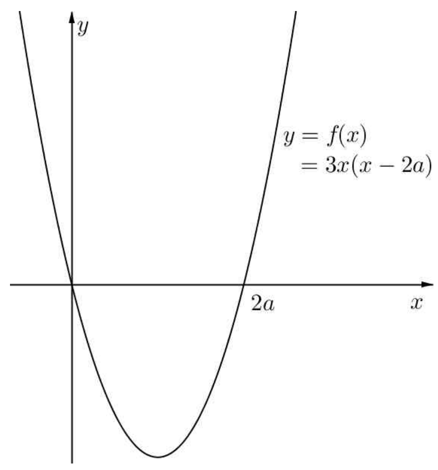


이 경우는 구간 $(0,\ 2a)$에서 $f(x)$의 부호가 모두 음이므로

$\int_0^a f(t)dt<0$이고, $f(0)<0$이므로 따라서 $g'(a)<0$, $g'(0)>0$.

그런데, 양수 a에 대하여 $g'(0)>0$이고 $g'(a)<0$이면
최고차항의 계수가 양수인 사차함수는 구간 $(0,\ a)$에서 극댓값을 가짐을 쉽게 알 수 있다. 또한 두 구간 $(a,\ \infty)$, $(-\infty,\ 0)$에서 0보다 작은 극솟값을 가짐도 알 수 있다.
($\because$ 극솟값이 $g(0)=g(a)=0$보다 작으므로)
한편 $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\infty>0$이므로 두 구간 $(a,\ \infty)$, $(-\infty,\ 0)$에서
곡선 $y=g(x)$는 x축과 각각 적어도 한 점 이상에서 만난다.
따라서, 곡선 $y=g(x)$는 $(0,\ 0)$, $(a,\ 0)$를 포함한 네 점에서 x축과 만나므로 (나)조건에 모순이다.

iii) $f(x)=3x(x-2a)$ ($f(x)=0$이 서로 다른 실근 2개를 가지는데, 하나는 0이고 하나는 $2a$인 경우)



이 경우도 구간 $(0,\ 2a)$에서 $f(x)$의 함숫값의 부호가 모두 음이므로 $\int_0^a f(t)dt<0$이고,

$f(0)=0$이므로 $g'(a)<0$, $g'(0)=0$ 이다.

따라서 $g(x)$는 $x=0$에서 극값을 가지므로
$g(x)=x^2(x-a)(x-b)$꼴로 표현이 된다.
(단, $g'(a)<0$이므로 b는 a보다 큰 실수여야 함을 사차함수 개형으로도 알 수 있다.)

본 시험지는 2021학년도 6월 평가원 대비 문제지이며, 출판물 (2021 기대모의고사)에 포함되는 자료이므로 무단으로 문제를 사용 시 불이익이 있습니다.

$$g(x)=(x-a)\int_0^x f(t)dt=(x-a)\left[t^3-3at^2\right]_0^x=(x-a)x^2(x-3a)$$

이므로 $b=3a$이다.

$$g'(x)=(x-a)f(x)+\int_0^x f(t)dt=3x(x-2a)(x-a)+x^2(x-3a)$$
$$=2x(2x^2-6ax+3a^2)$$

이므로 방정식 $g'(x)=0$의 실근인

$x=0$, $\frac{3a-\sqrt{3}a}{2}$, $\frac{3a+\sqrt{3}a}{2}$에서 각각 극소, 극대, 극소임을 알 수 있고, 이들의 합이 6이어야 하므로 $a=2$이다. (근과 계수의 관계를 이용해도 좋다.)

따라서 $g(x)=(x-2)x^2(x-6)$이므로 $g(7)=5\times 49=245$이다.

본 시험지는 2021학년도 6월 평가원 대비 문제지이며, 출판물 (2021 기대모의고사)에 포함되는 자료이므로 무단으로 문제를 사용 시 불이익이 있습니다.