서문

새 교육과정에 맞춘 기출문제집의 기준이 되려고 합니다 !

2016년 11월 17일에 실시된 대학수학능력평가 수학 영역은 6년만의 불수능으로, 고득점을 노리는 수험생에게 만점과 1등급을 결정하는 최고 난문(30번)에 대한 대비가 그 어느 때보다 중요해졌습니다.

○ 올해 최고 난문의 특징은

가형 : 가형 30번은 최소한 6단계 이상의 사고과정을 거쳐야 풀 수 있는 문제였습니다. 물론 수학적 직관으로 몇 단계는 줄일 수 있겠습니다만, 그렇다고 해도 지난 5년간 출제된 이과 30번에 비하여 사고과정의 단계가 많았습니다. 그런데 어려워 보이는 이 문제는 사실 알고 보면 **지난 23년간 출제된 평가원 기출문제들의 재조합일 뿐이며, 풀이의 각 과정과 과거 평가원 기출문제 사이에 일대일대응이 가능**합니다. 이처럼 평가원이 수험생에게 우선적으로 요구하는 것은 교과서의 개념을 정확하게 숙지하고, 이를 바탕으로 교과서 문제, 평가원 기출문제를 반복 연습하는 것입니다. 이런 원칙을 지켜서 연습을 충분히 한 수험생의 경우 올해 가형 30번은 도전해 볼만 했을 것이지만, 빠르고 멋있는 풀이에 길들여진 수험생의 경우 당혹스러웠을 것입니다. 더 이상 피상적인 학습만으로는 가형에서 만점은 불가능 한 것입니다.

나형 : 나형 30번은 최소한 3단계 이상의 사고과정을 거쳐야 풀 수 있는 문제였습니다. 풀이의 중간 단계에서 역함수의 개념이 사용되는데, 역함수에 대한 정확한 이해를 바탕으로 다양한 상황의 문제를 푼 경험이 없었다면 당혹스러웠을 것입니다. 지난 5년간의 수능과 비교해 볼 때, 이젠 나형에서도 개념에 대한 정확한 이해와 이를 문제풀이에 실제로 적용할 수 있는 능력을 요구하고 있는 것입니다. 특히 난문의 경우 풀다 보면 어떻게든 풀리는 문제가 출제될 가능성은 적어지고 있는 것입니다.

○ 수능 수학을 대비하기 위해서는

(1) 교과서의 정의/정리/공식/성질/법칙을 정확하게 이해하고, 이를 교과서의 예제와 연습문제에 적용하는 연습을 해야 합니다.
(2) (1)의 연습을 바탕으로 평가원 기출문제를 최소 3회 이상 반복해서 풀어야 합니다. 특히 **정답률이 낮은 난문에 대해서는 자신의 손에서 정확한 풀이가 나올 때까지 서술형 풀이를 여러 번 작성**해야 합니다. 이 책의 모든 풀이는 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 가능하면 표현의 경제성보다는 수학적 엄밀함에 무게를 두었습니다. 자신의 풀이와 해설집의 풀이를 대조비교 하는 것도 좋은 공부가 될 것입니다.
(3) 평가원 기출문제에서 자주 등장하는 수학적 사고력, 수학적 사실들은 스스로 정리하는 것이 필요합니다. 평가원 기출문제는 확장된 교과서이기 때문입니다. 한 번 풀고 마는 문제들이 아닙니다.

○ 해설에 대하여

이 책에 실린 **해설은 지난 5년간 1만 시간 이상 작업한 결과물**입니다. 다양한 관점을 제시하기 위하여 시중에 출시된 대부분의 개념서와 기출문제집의 해설을 읽었으며, 이를 해설에 적극적으로 반영하였습니다. 아직은 부족한 점이 많겠지만 **시중의 어떤 기출 문제집 보다도 많은 다른 풀이와 참고 사항을 수록**하였다고 생각합니다.

수능 수학의 모든 것을 한 권에 담는 다는 각오로, 매년 개정판을 내면서 해설 보강 작업을 계속해나갈 것입니다.

이동훈

2018학년도 수능의 시작입니다 !

학년도	시험	실시년도/월	학년도	시험	실시년도/월
5차 교육과정			2007	대학수학능력	2006년 11월
1991	실험평가(1차)	1990년 12월	2008	모의평가(6월)	2007년 6월
1992	실험평가(2차)	1991년 5월	2008	모의평가(9월)	2007년 9월
1992	실험평가(3차)	1991년 8월	2008	대학수학능력	2007년 11월
1992	실험평가(4차)	1991년 11월	2009	모의평가(6월)	2008년 6월
1993	실험평가(5차)	1992년 5월	2009	모의평가(9월)	2008년 9월
1993	실험평가(6차)	1992년 8월	2009	대학수학능력	2008년 11월
1993	실험평가(7차)	1992년 11월	2010	모의평가(6월)	2009년 6월
1994	대학수학능력(1차)	1993년 8월	2010	모의평가(9월)	2009년 9월
1994	대학수학능력(2차)	1993년 11월	2010	대학수학능력	2009년 11월
1995	대학수학능력	1994년 11월	2011	모의평가(6월)	2010년 6월
1996	대학수학능력	1995년 11월	2011	모의평가(9월)	2010년 9월
1997	대학수학능력	1996년 11월	2011	대학수학능력	2010년 11월
1998	대학수학능력	1997년 11월	2007개정 교육과정		
6차 교육과정			2012	모의평가(6월)	2011년 6월
1999	대학수학능력	1998년 11월	2012	모의평가(9월)	2011년 9월
2000	대학수학능력	1999년 11월	2012	대학수학능력	2011년 11월
2001	대학수학능력	2000년 11월	2014	예비평가	2012년 5월
2002	대학수학능력	2001년 11월	2013	모의평가(6월)	2012년 6월
2003	대학수학능력	2002년 9월	2013	모의평가(9월)	2012년 9월
2003	대학수학능력	2002년 11월	2013	대학수학능력	2012년 11월
2004	대학수학능력	2003년 6월	2014	모의평가(6월)	2013년 6월
2004	대학수학능력	2003년 9월	2014	모의평가(9월)	2013년 9월
2004	대학수학능력	2003년 11월	2014	대학수학능력	2013년 11월
7차 교육과정			2015	모의평가(6월)	2014년 6월
2005	예비평가	2003년 12월	2015	모의평가(9월)	2014년 9월
2005	모의평가(6월)	2004년 6월	2015	대학수학능력	2014년 11월
2005	모의평가(9월)	2004년 9월	2016	모의평가(6월)	2015년 6월
2005	대학수학능력	2004년 11월	2016	모의평가(9월)	2015년 9월
2006	모의평가(6월)	2005년 6월	2016	대학수학능력	2015년 11월
2006	모의평가(9월)	2005년 9월	2009개정 교육과정		
2006	대학수학능력	2005년 11월	2017	모의평가(6월)	2016년 6월
2007	모의평가(6월)	2006년 6월	2017	모의평가(9월)	2016년 9월
2007	모의평가(9월)	2006년 9월	2017	대학수학능력	2016년 11월

각 과목별 문항 수 및 비율 (총 3108 문항)

수학2	미적분1	**미적분2**	확률과 통계	기하와 벡터	수학1	교육과정 外
467	528	**539**	478	244	134	718
15 %	17 %	**17.4 %**	15.4 %	7.8 %	4.3 %	23.1 %

※ 수학1, 교육과정 外의 문항과 해설은 오르비북스(orbibooks.com)에서 무료PDF파일 다운로드 가능

○ **'이동훈 기출문제집 미적분2'** 에는 평가원이 세상에 선보인 3108개의 문항 중에서
2009개정 교육과정에 맞는 539개의 문항을 엄선하여 수록하였습니다.
(일부 문항은 새 교육과정에 맞게 용어와 기호를 수정)

○ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
소단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

○ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
다른 풀이 및 참고 사항을 최대한 수록하여 문제 해결의 다양한 시각을 제시하였습니다.

문제집 목차

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학2	집합과 명제	A	확률과 통계	순열과 조합	M
	함수	B		확률	N
	수열	C		통계	P
	지수와 로그	D	기하와 벡터	평면 곡선	Q
미적분1	수열의 극한	E		평면 벡터	R
	함수의 극한과 연속	F		공간 도형	S
	다항함수의 미분법	G		공간 벡터	T
	다항함수의 적분법	H	수학1	다항식	U
미적분2	지수함수와 로그함수	I		방정식과 부등식	V
	삼각함수	J		도형의 방정식	W
	미분법	K	교육과정 外		Z
	적분법	L			

K. 미분법

- 2009개정 교육과정

○ 삼각함수의 배각의 공식, 반각의 공식, 합/차를 곱으로 바꾸는 공식, 곱을 합/차로 바꾸는 공식을 반드시 사용해야 하는 문제는 모두 제외하였습니다.
○ 삼각함수의 합성을 이용하여 최대최소를 구하는 문제는 미적분2 함수의 그래프(최대최소)에 수록하였습니다. (풀이에서는 삼각함수의 합성이 아닌 초월함수의 도함수를 이용하였습니다.)
○ 사인법칙, 코사인법칙을 사용하는 풀이는 제외하였습니다.
○ 주기함수는 문과에서 배우지 않으므로, 주기함수의 미분법은 미적분2 미분법에 수록하였습니다.
○ 다항함수가 주어진 미분법 문제 중에서 출제의도가 초월함수의 미분법에 해당하는 경우에는, 문제를 미적분1이 아닌 미적분2에 수록하였습니다.

K051

(2012(6)－가형8)

함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x$ $(a>0)$의 극솟값이 0일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{2}{e}$ ③ $\sqrt{e}$
④ e ⑤ $2e$

K052

(2017(6)－가형13)

함수 $f(x)=(x^2-8)e^{-x+1}$은 극솟값 a와 극댓값 b를 갖는다. 두 수 a, b의 곱 ab의 값은? [3점]

① -34 ② -32 ③ -30
④ -28 ⑤ -26

K. 변곡점과 함수의 그래프

K053

(2002－자연9)

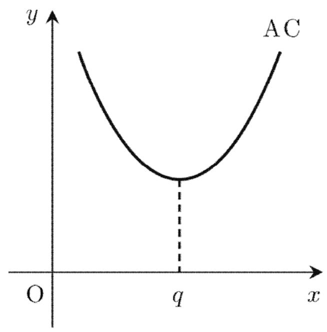
$1\le x\le 2$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $\alpha x\le e^x\le \beta x$가 성립하도록 상수 α, β를 정할 때, $\beta-\alpha$의 최솟값은? [3점]

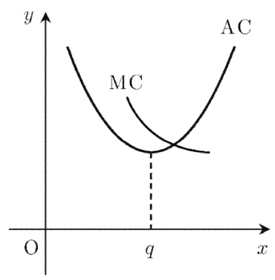
① $\frac{e}{2}$ ② e ③ $e\left(\frac{e^3}{4}-1\right)$
④ $e\left(\frac{e^2}{3}-1\right)$ ⑤ $e\left(\frac{e}{2}-1\right)$

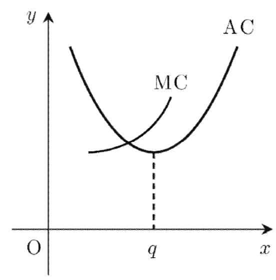
K054

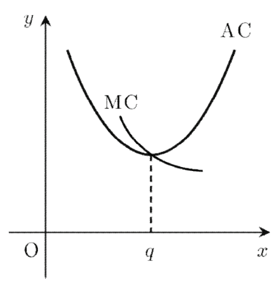
(2003-자연24)

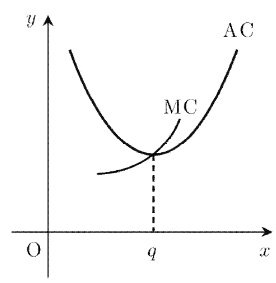
어떤 제품의 생산량이 x일 때 생산비를 $f(x)$라고 하자. 이 때, $\dfrac{f(x)}{x}$를 평균생산비라 하고, AC로 나타낸다. 또, $f(x)$가 미분가능하면 $f'(x)$를 생산량이 x일 때의 한계생산비라 하고 MC로 나타낸다. 평균생산비 $\mathrm{AC}=\dfrac{f(x)}{x}$의 그래프가 그림과 같고 $x=q$에서 극솟값을 가질 때, $x=q$ 근방에서 한계생산비 $\mathrm{MC}=f'(x)$의 그래프의 개형은? [3점]

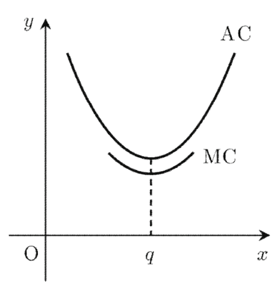


①


②


③


④


⑤


K055

(2007-가형29)

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$를 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자.

직선 $y=g(x)$가 함수 $f(x)$의 그래프와 점 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서 접할 때, 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하자. <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $a \neq b$이다.) [4점]

ㄱ. $h'(b)=0$
ㄴ. 방정식 $h'(x)=0$은 3개 이상의 실근을 갖는다.
ㄷ. 점 $(a,\ h(a))$는 곡선 $y=h(x)$의 변곡점이다.

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

K056
(2008-가형27)

함수 $f(x)=x+\sin x$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=(f\circ f)(x)$로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. 함수 $f(x)$의 그래프는 개구간 $(0,\ \pi)$에서 위로 볼록하다. ㄴ. 함수 $g(x)$는 개구간 $(0,\ \pi)$에서 증가한다. ㄷ. $g'(x)=1$인 실수 x가 개구간 $(0,\ \pi)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

K057
(2009(9)-가형27)

좌표평면에서 곡선 $y=\cos^n x$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2},\ n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\right)$의 변곡점의 y좌표를 a_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{e^2}$ ② $\dfrac{1}{e}$ ③ $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$
④ $\dfrac{1}{2e}$ ⑤ $\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$

K058
(2009-가형27)

폐구간 $[0,\ 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $f(0)=0$, $f(1)=1$이며, 개구간 $(0,\ 1)$에서 이계도함수를 갖고 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$일 때, $\displaystyle\int_0^1\{f^{-1}(x)-f(x)\}dx$의 값과 같은 것은? [3점]

① $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{2n}$

② $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{2}{n}$

③ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$

④ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{2n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$

⑤ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$

K059

(2010-가형17)

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음의 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \le x < 1$일 때, $g(x)=f(x)$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f(-1)=f(1)$이고 $f'(-1)=f'(1)$이면 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면, $f'(0)f'(1)<0$이다.
ㄷ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $f'(1)>0$이면, 구간 $(-\infty, -1)$에 $f'(c)=0$인 c가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

K060

(2011(9)-가형27)

곡선 $y=\left(\ln\frac{1}{ax}\right)^2$의 변곡점이 직선 $y=2x$ 위에 있을 때, 양수 a의 값은? [3점]

① e ② $\frac{5}{4}e$ ③ $\frac{3}{2}e$
④ $\frac{7}{4}e$ ⑤ $2e$

K061

(2011(9)-가형29)

다항함수 $f(x)$에 대하여 다음 표는 x의 값에 따른 $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$의 변화 중 일부를 나타낸 것이다.

x	$x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$
$f'(x)$		0		1
$f''(x)$	$+$		$+$	0
$f(x)$		$\frac{\pi}{2}$		π

함수 $g(x)=\sin(f(x))$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $g'(3)=-1$
ㄴ. $1<a<b<3$이면 $-1<\frac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$이다.
ㄷ. 점 P$(1, 1)$은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

K062

(2012(6)-가형21)

양의 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수

$$f(x)=\frac{1}{27}(x^4-6x^3+12x^2+19x)$$

에 대하여 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 점 $(2,\ 2)$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=x$의 실근 중 양수인 것은 $x=2$ 하나뿐이다.
ㄷ. 함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=2$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

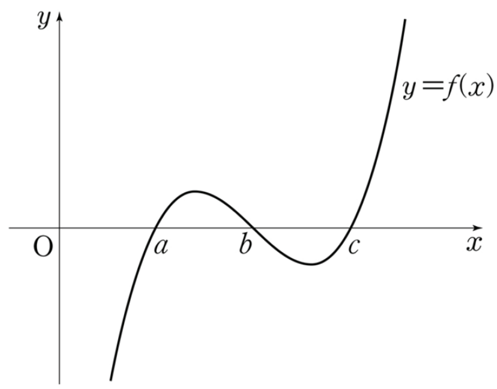
K063

(2013(9)-가형13)

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같고, $f(x)$는

$$\int_a^b f(x)dx=3,\ \int_a^c f(x)dx=0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [3점]



ㄱ. $F(b)=F(a)+3$
ㄴ. 점 $(c,\ F(c))$는 곡선 $y=F(x)$의 변곡점이다.
ㄷ. $-3<F(a)<0$이면 방정식 $F(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

K064

(2013(9)−가형21)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g'(x) \le \frac{1}{3}$이다.
(나) $\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - g(x)}{(x-3)g(x)} = \frac{8}{9}$

$f(1)$의 값은? [4점]

① -11　② -9　③ -7
④ -5　⑤ -3

K065

(2013−가형21)

함수 $f(x) = kx^2e^{-x}\,(k > 0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최댓값은? [4점]

① $\frac{1}{e}$　② $\frac{1}{\sqrt{e}}$　③ $\frac{e}{2}$
④ $\sqrt{e}$　⑤ e

K066

(2015(9)-B형20)

3 이상의 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=x^n e^{-x}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f\left(\frac{n}{2}\right)=f'\left(\frac{n}{2}\right)$
ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. 점 $(0,\ 0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

K067

(2017(6)-가형21)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)\neq 1$
(나) $f(x)+f(-x)=0$
(다) $f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}$

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq -1$이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 어떤 열린구간에서 감소한다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$는 세 개의 변곡점을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

K068

(2017-가형30)

$x>a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 상수이다.)

(가) $x>a$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x)=g(x)$이다.
(나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다.
(다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오. [4점]

해설집 목차

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학2	집합과 명제	A	확률과 통계	순열과 조합	M
	함수	B		확률	N
	수열	C		통계	P
	지수와 로그	D	기하와 벡터	평면 곡선	Q
미적분1	수열의 극한	E		평면 벡터	R
	함수의 극한과 연속	F		공간 도형	S
	다항함수의 미분법	G		공간 벡터	T
	다항함수의 적분법	H	수학1	다항식	U
미적분2	지수함수와 로그함수	I		방정식과 부등식	V
	삼각함수	J		도형의 방정식	W
	미분법	K	교육과정 外		Z
	적분법	L			

K. 미분법

1 ⑤	**2** ⑤	**3** ④	**4** ①	**5** ①
6 10	**7** ③	**8** 21	**9** 24	**10** 12
11 ①	**12** ⑤	**13** 15	**14** ⑤	**15** 8
16 39	**17** ③	**18** 28	**19** ④	**20** ④
21 ①	**22** ④	**23** ②	**24** ③	**25** 83
26 ④	**27** ③	**28** ①	**29** 15	**30** 16
31 ④	**32** 4	**33** ⑤	**34** ②	**35** ③
36 ④	**37** 48	**38** ②	**39** ④	**40** ④
41 ⑤	**42** ①	**43** ②	**44** ④	**45** 35
46 ⑤	**47** ⑤	**48** ③	**49** ①	**50** ⑤
51 ④	**52** ②	**53** ⑤	**54** ④	**55** ⑤
56 ⑤	**57** ③	**58** ②	**59** ③	**60** ⑤
61 ③	**62** ⑤	**63** ③	**64** ①	**65** ⑤
66 ③	**67** ①	**68** 216	**69** ④	**70** ④
71 ②	**72** ②	**73** ②	**74** ②	**75** ③
76 16	**77** ①	**78** ②	**79** 11	**80** ⑤
81 ②	**82** ④	**83** 15	**84** ①	**85** ③
86 ④	**87** 28	**88** 109	**89** ④	**90** ④
91 ①	**92** ⑤	**93** ①	**94** ④	**95** 18
96 ④	**97** ④	**98** ⑤	**99** ③	**100** 9
101 ⑤	**102** ④	**103** 72	**104** ④	**105** ④
106 ③	**107** ④	**108** 15		

K001 | 답 ⑤

[풀이]

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

$\lim_{x\to 0} f(x)$와 $f(0)$이 존재하고,

$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

ㄱ. (미분가능하다)

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{hf(h)-0\times f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}f(h)=f(0)$$

함수 $xf(x)$의 $x=0$에서의 미분계수는 $f(0)$이다.

즉, 함수 $xf(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄴ. (미분가능하다)

함수 $y=x$는 $x=0$에서 미분가능하다.

함수 $y=xf(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

미분가능한 함수의 성질에 의해서

함수 $y=x^2f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. (미분가능하다)

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+hf(h)}-\frac{1}{1+0\times f(0)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-f(h)}{1+hf(h)}=-f(0)$$

함수 $\frac{1}{1+xf(x)}$의 $x=0$에서의 미분계수는 $-f(0)$이다.

즉, 함수 $\frac{1}{1+xf(x)}$는 $x=0$에서 미분가능하다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

K002 | 답 ⑤

[풀이]

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\sqrt{(a-1)^2+(f(a)-f(1))^2}=a^2-1$

양변을 제곱하여 정리하면

$(f(a)-f(1))^2=(a-1)^2(a^2+2a)$

$a>1$이므로

$f(a)-f(1)=(a-1)\sqrt{(a^2+2a)}$

양변을 양수 $a-1$로 나누면

$$\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\sqrt{a^2+2a}$$

미분계수의 정의에서

$$\therefore\ f'(1)=\lim_{a\to 1+}\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\lim_{a\to 1+}\sqrt{a^2+2a}=\sqrt{3}$$

답 ⑤

K003 | 답 ④

[풀이1]

조건 (가)에서 정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^x f(t)dt+\int_x^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=1$$

정리하면

$$\int_x^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=1-\int_0^x f(t)dt$$

이를 조건 (나)에 대입하면

$$\cos x\int_0^x f(t)dt=\sin x\left(1-\int_0^x f(t)dt\right)$$

정리하면

$$\int_0^x f(t)dt=\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}$$

적분과 미분의 관계에서

함수 $|f(x)|=x^2$은 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.
ㄴ. (참)
함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가지므로
$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 양에서 음으로 바뀐다.
따라서 충분히 작은 $|h|$에 대하여
$h>0$이면 $f'(h)<0$
$h<0$이면 $f'(h)>0$
함수 $f(|x|)$에 대하여
$f(|x|)=\begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$
합성함수의 미분법에 의하여
$\{f(|x|)\}'=\begin{cases} f'(x) & (x>0) \\ -f'(-x) & (x<0) \end{cases}$
충분히 작은 $|h|$에 대하여
$h>0$이면 $f'(|h|)=f'(h)<0$
$h<0$이면 $f'(|h|)=-f'(-h)>0$
함수 $f(|x|)$는 $x=0$에서 극댓값을 가진다.
ㄷ. (참)
함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가지므로
$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 양에서 음으로 바뀐다.
$g(x)=f(x)-x^2|x|$로 두자.
$g(x)=\begin{cases} f(x)-x^3 & (x \geq 0) \\ f(x)+x^3 & (x<0) \end{cases}$
미분하면
$g'(x)=\begin{cases} f'(x)-3x^2 & (x>0) \\ f'(x)+3x^2 & (x<0) \end{cases}$
충분히 작은 $|h|$에 대하여
$h>0$이면 $g'(h)=f'(h)-3h^2<0$
$h<0$이면 $g'(h)=f'(h)+3h^2>0$
함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가진다.
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.
답 ⑤

K051 | 답 ④

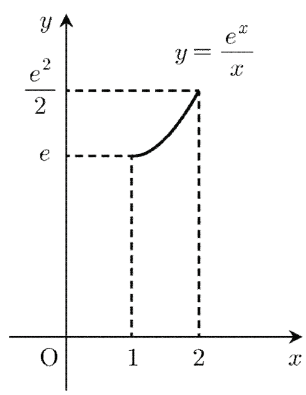
[풀이]
진수의 조건에서 $x>0$
함수 $f(x)$의 정의역은 양의 실수 전체의 집합이다.
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=x-\frac{a}{x}=\frac{x^2-a}{x}$
$f'(x)=0$에서 $x=\sqrt{a}$
$x=\sqrt{a}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{a}$에서 극솟값을 갖는다.
주어진 조건에서
$f(\sqrt{a})=\frac{1}{2}a-a\ln\sqrt{a}=0$
정리하면
$\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}$
방정식을 풀면
$\therefore\ a=e$
답 ④

K052 | 답 ②

[풀이]
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=(-x^2+2x+8)e^{-x+1}=-(x-4)(x+2)e^{-x+1}$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=4$
$x=-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값을 갖는다. 이때, 극솟값은
$a=f(-2)=-4e^3$
$x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극댓값을 갖는다. 이때, 극댓값은
$b=f(4)=8e^{-3}$
$\therefore\ ab=-32$
답 ②

K053 | 답 ⑤

[풀이1]
주어진 부등식의 각 변을 양수 x로 나누면
$\alpha \leq \frac{e^x}{x} \leq \beta$
함수 $f(x)$의 방정식을
$f(x)=\frac{e^x}{x}$(단, $1 \leq x \leq 2$)
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$
구간 $(1,\ 2)$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(1,\ 2)$에서 증가한다.
함수 $f(x)$의 그래프는



구간 $(1,\ 2)$에서 $e \le f(x) \le \dfrac{e^2}{2}$이므로

$\alpha \le e,\ \beta \ge \dfrac{e^2}{2}$

$\therefore\ \beta - \alpha \ge \dfrac{e^2}{2} - e$

답 ⑤

[풀이2]

곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(t,\ e^t)$에서의 접선의 방정식은

$y=e^t(x-t)+e^t$

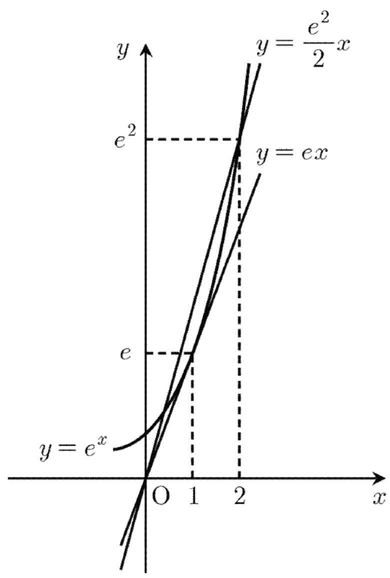
이 접선이 원점을 지난다고 하면 $t=1$이다.

이때, 접선의 방정식은

$y=ex$

곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(2,\ e^2)$과 원점을 지나는 직선의 방정식은

$y=\dfrac{e^2}{2}x$



위의 그림에서 구간 $[1,\ 2]$에서

$\alpha x \le e^x \le \beta x$이기 위해서는

$\alpha \le e,\ \beta \ge \dfrac{e^2}{2}$

$\therefore\ \beta - \alpha \ge \dfrac{e^2}{2} - e$

답 ⑤

K054 | 답 ④

[풀이1]

$y=\dfrac{f(x)}{x}$의 도함수는

$y'=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$

$y=\dfrac{f(x)}{x}$의 그래프가 $x=q(\neq 0)$에서 극솟값을 가지므로

$\dfrac{f'(q)q-f(q)}{q^2}=0$

정리하면

$f'(q)=\dfrac{f(q)}{q}$

곡선 $y=f'(x)$는 곡선 $y=\dfrac{f(x)}{x}$ 위의 점 $\left(q,\ \dfrac{f(q)}{q}\right)$를 지난다.

$x=q$의 좌우에서 y'의 부호는 음에서 양으로 바뀐다.

매우 작은 양수 h에 대하여 구간 $(q-h,\ q)$에서의 y'의 부호는 음이므로

$y'=\dfrac{f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}}{x}<0$

즉, $f'(x)<\dfrac{f(x)}{x}$

구간 $(q-h,\ q)$에서 함수 $f'(x)$의 그래프는 함수 $\dfrac{f(x)}{x}$의 그래프의 아래에 있다.

매우 작은 양수 h에 대하여 구간 $(q,\ q+h)$에서의 y'의 부호는 양이므로

$y'=\dfrac{f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}}{x}>0$

즉, $f'(x)>\dfrac{f(x)}{x}$

구간 $(q,\ q+h)$에서 함수 $f'(x)$의 그래프는 함수 $\dfrac{f(x)}{x}$의 그래프의 위에 있다.

이상에서 함수 $f'(x)$의 그래프는 ④와 같다.

답 ④

[풀이2]

$y=\dfrac{f(x)}{x}$의 도함수는

$y'=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$

$y=\dfrac{f(x)}{x}$의 그래프가 $x=q(\neq 0)$에서 극솟값을 가지므로

$\dfrac{f'(q)q-f(q)}{q^2}=0$

정리하면

$f'(q)=\dfrac{f(q)}{q}$ $\cdots$㉠

곡선 $y=f'(x)$는 곡선 $y=\dfrac{f(x)}{x}$ 위의 점 $\left(q,\ \dfrac{f(q)}{q}\right)$를 지난다.

$y=\dfrac{f(x)}{x}$의 이계도함수는

$$y''=\frac{f''(x)}{x}-\frac{2}{x^2}\left(f'(x)-\frac{f(x)}{x}\right)$$

$y=\dfrac{f(x)}{x}$의 그래프가 $x=q(\neq 0)$에서 아래로 볼록이므로

$$y''=\frac{f''(q)}{q}-\frac{2}{q^2}\left(f'(q)-\frac{f(q)}{q}\right)>0$$

㉠에 의하여

$$\frac{f''(q)}{q}>0$$

q는 양수이므로

$f''(q)>0$

함수 $y=f'(x)$의 그래프는 $x=q$에서 증가한다.

이상에서 함수 $f'(x)$의 그래프는 ④와 같다.

답 ④

K055 | 답 ⑤

[풀이]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 이계도함수를 가지므로

함수 $h(x)$는 이계도함수를 갖는다.

따라서 함수 $h(x)$는 미분가능하다.

ㄱ. (참)

접선 $y=g(x)$의 방정식은

$g(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$

함수 $h(x)$의 방정식은

$h(x)=f(x)-f'(a)(x-a)-f(a)$

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=f'(x)-f'(a)$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선이 $y=g(x)$이므로

$f'(b)=$(접선의 기울기)$=f'(a)$

$\therefore\ h'(b)=f'(b)-f'(a)=0$

ㄴ. (참)

접선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 A와 B를 지나므로

$g(a)=f(a)$에서 $h(a)=f(a)-g(a)=0$

$g(b)=f(b)$에서 $h(b)=f(b)-g(b)=0$

즉, $h(a)=h(b)$

함수 $h(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하므로

롤의 정리에 의하여

$h'(c)=0$(단, $a<c<b$)

인 c가 적어도 하나 존재한다.

보기 ㄱ의 결과에서

$h'(a)=h'(b)=0$이므로

방정식 $h'(x)=0$의 실근의 개수는 3 이상이다.

ㄷ. (참)

함수 $g(x)$의 이계도함수는

$g''(x)=0$이므로

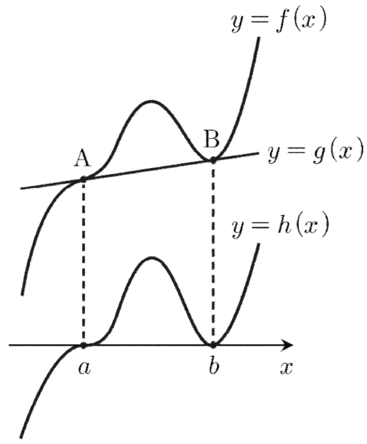
함수 $h(x)$의 이계도함수는

$h''(x)=f''(x)$

점 A가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이므로 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호는 바뀐다.

$x=a$의 좌우에서 $h''(x)$의 부호가 바뀌므로 점 $(a,\ h(a))$는 곡선 $y=h(x)$의 변곡점이다.

참고로 문제에서 주어진 조건을 모두 만족시키는 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$의 그래프 중에서 한 경우를 그리면 아래와 같다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

K056 | 답 ⑤

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=1+\cos x$

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$

함수 $f(x)$는 증가함수이다.

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x)=-\sin x$

$f''(x)=0$에서 $x=n\pi$

(단, n은 정수)

$x=n\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $f(x)$의 그래프는 $x=n\pi$에서 변곡점을 갖는다.

ㄱ. (참)

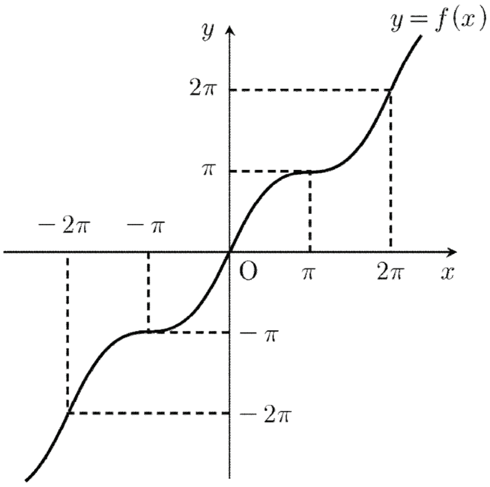
구간 $(0,\ \pi)$에서 $f''(x)<0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $(0,\ \pi)$에서 위로 볼록이다.

구간 $(\pi,\ 2\pi)$에서 $f''(x)>0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $(0,\ \pi)$에서 아래로 볼록이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는



ㄴ. (참)

합성함수의 미분법에 의하여

$g'(x) = f'(f(x))f'(x)$

$= \{1 + \cos(x + \sin x)\}(1 + \cos x)$

구간 $(0,\ \pi)$에서

$0 \le x + \sin x \le \pi$

$0 \le 1 + \cos(x + \sin x) \le 2$

$0 \le 1 + \cos x \le 2$

이므로, 구간 $(0,\ \pi)$에서

$g'(x) \ge 0$

함수 $g(x)$는 구간 $(0,\ \pi)$에서 증가한다.

ㄷ. (참)

함수 $g(x)$가 구간 $[0,\ \pi]$에서 연속이고

구간 $(0,\ \pi)$에서 미분가능하므로

평균값의 정리에 의해서

$\dfrac{g(\pi) - g(0)}{\pi - 0} = 1 = g'(c)$

를 만족하는 실수 c가 구간 $(0,\ \pi)$에 적어도 하나 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

K057 | 답 ③

[풀이]

합성함수의 미분법에 의하여

주어진 함수의 도함수는

$y' = -n(\cos x)^{n-1}\sin x$

합성함수의 미분법에 의하여

주어진 함수의 이계도함수는

$y'' = n(n-1)(\cos x)^{n-2}\sin^2 x - n(\cos x)^n$

방정식 $y'' = 0$을 풀자.

$(n-1)\sin^2 x - \cos^2 x = 0$

$(n-1)(1 - \cos^2 x) - \cos^2 x = 0$

정리하면

$\cos^2 x = \dfrac{n-1}{n}$

구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 $\cos x$는 양수이므로

$\cos x = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$

a_n의 일반항은

$a_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\ (n \ge 2)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$

$= \lim_{h\to 0-}(1+h)^{-\frac{1}{2h}}$

$= \lim_{h\to 0-}\dfrac{1}{\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

답 ③

K058 | 답 ②

[풀이]

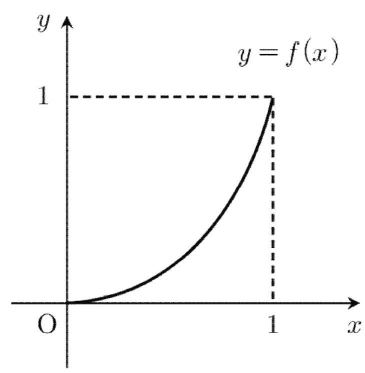
구간 $(0,\ 1)$에서 $f'(x) > 0$이므로

구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

구간 $(0,\ 1)$에서 $f''(x) > 0$이므로

구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $f(x)$는 아래로 볼록하다.

함수 $f(x)$의 그래프는



역함수 $f^{-1}(x)$의 정의역은

$\{x \mid 0 \le x \le 1\}$

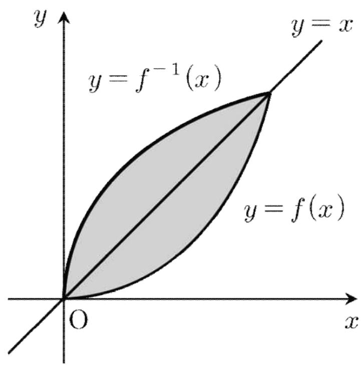
구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $f(x)$가 연속이므로

구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $f^{-1}(x)$는 연속이다.

구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $f^{-1}(x) - f(x)$는 연속이다.

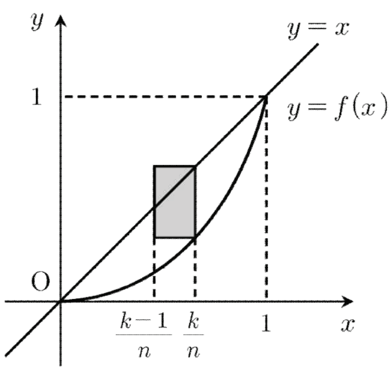
정적분 $\displaystyle\int_0^1 \{f^{-1}(x) - f(x)\}dx$의 값은

아래 그림에서 어두운 부분의 넓이와 같다.



함수 $f(x)$의 그래프와 역함수 $f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형과 함수 $f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형은 서로 합동이다. 따라서 두 도형의 넓이는 같다.
함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구분구적법으로 나타내면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$$



$$\therefore \int_0^1\{f^{-1}(x)-f(x)\}dx$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{2}{n}$$

답 ②

K059 | 답 ③

※ 주기함수의 표현을 포함하고 있으므로 미적분1이 아닌 미적분2에 수록합니다.

[풀이]

ㄱ. (참)

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

주어진 조건에 의하여

$f(-1)=1-a+b-c+d$

$=1+a+b+c+d=f(1)$

풀면 $c=-a$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2-ax+d$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx-a$

주어진 조건에 의하여

$f'(-1)=-4+3a-2b-a$

$=4+3a+2b-a=f'(1)$

풀면 $b=-2$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^4+ax^3-2x^2-ax+d$

정리하면

$f(x)=x^4-2x^2+d+ax(x+1)(x-1)$

함수 $f(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 세 점

$(-1,\ d-1)$, $(0,\ d)$, $(1,\ d-1)$

을 지난다.

조건 (가), (나)에 의하여 함수 $g(x)$의 그래프는

$(2n,\ d)$, $(2n-1,\ d-1)$

을 지난다.(단, n은 정수)

○ 함수 $g(x)$의 연속성

$f(x)$가 구간 $(-1,\ 1)$에서 연속이므로

조건 (나)에 의하여 $x\neq 2n-1$인 모든 구간에서

함수 $g(x)$는 연속이다.

$\lim\limits_{x\to 2n-1+}g(x)=\lim\limits_{x\to -1+}f(x)=f(-1)=d-1$

$\lim\limits_{x\to 2n-1-}g(x)=\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=f(1)=d-1$

함수 $g(x)$의 $x=2n-1$에서의 극한값은

$\lim\limits_{x\to 2n-1}g(x)=d-1$

함수 $g(x)$의 $x=2n-1$에서의 함숫값은

$g(2n-1)=f(-1)=d-1$

$\lim\limits_{x\to 2n-1}g(x)=g(2n-1)$이므로

함수의 연속의 정의에 의하여

함수 $g(x)$는 $x=2n-1$에서 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

○ 함수 $g(x)$의 미분가능성

$f(x)$가 구간 $(-1,\ 1)$에서 미분가능하므로

조건 (나)에 의하여 $x\neq 2n-1$인 모든 구간에서

함수 $g(x)$는 미분가능하다.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(2n-1+h)-g(2n-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}\ (\because (나))$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}\ (\because (가))$$

$=f'(-1)=2a$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(2n-1+h)-g(2n-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}\ (\because (\text{나}))$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\ (\because (\text{가}))$$
$=f'(1)=2a$

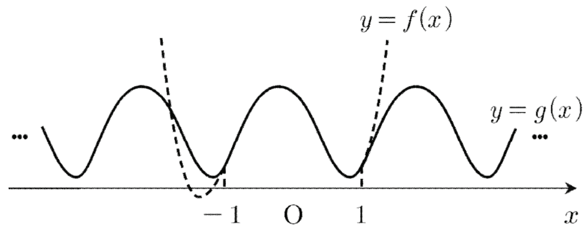
미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(2n-1+h)-g(2n-1)}{h}=2a$$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=2n-1$에서 미분가능하다.

따라서 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

예를 들어 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는



ㄴ. (거짓)

(반례)

$a=0$일 때, 함수 $f(x)$의 방정식은

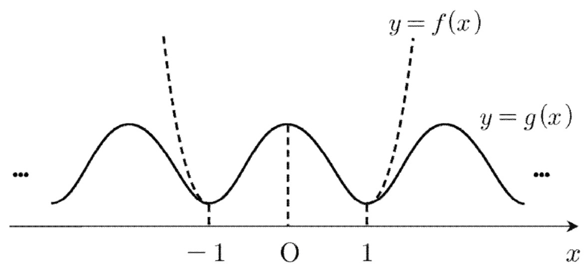
$f(x)=x^4-2x^2+d$

도함수 $f'(x)$의 방정식은

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는



함수 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 미분가능하고

$f'(0)f'(1)=0$

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

ㄷ. (참)

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $g'(1)$이 존재한다.

조건 (가), (나)에 의하여

$f'(-1)=f'(1)=g'(1)$

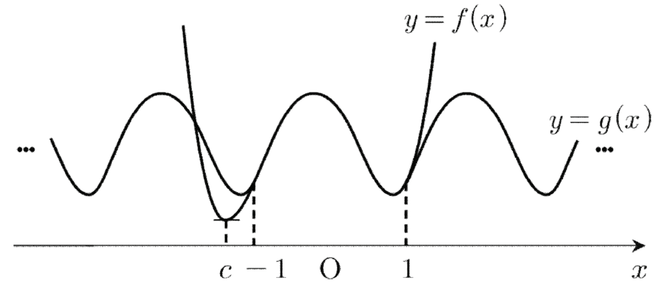
주어진 조건에 의하여

$f'(-1)>0$

$$\lim_{x\to -\infty} f'(x)$$
$$=\lim_{x\to -\infty} x^3\left(4+\frac{3a}{x}-\frac{4}{x^2}-\frac{a}{x^3}\right)=-\infty$$

이므로, 사이값 정리에 의하여 $f'(c)=0$을 만족하는 c가 구간 $(-\infty,\ -1)$에서 적어도 하나 존재한다.

예를 들어 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

[참고]

보기 ㄷ이 참임을 다음과 같이 보일 수도 있다.

$f(-1)=f(1)$이므로

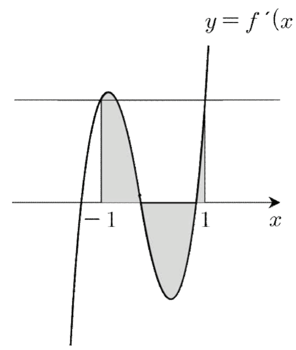
미적분의 기본정리에 의하여

$$\int_{-1}^{1} f'(x)dx=[f(x)]_{-1}^{1}=f(1)-f(-1)=0$$

이제 $f'(-1)=f'(1)>0$, $\int_{-1}^{1} f'(x)dx=0$

을 모두 만족시키는

삼차함수 $f'(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



위의 그림에서 $f'(c)=0$인 c가

구간 $(-\infty,\ -1)$에서 존재함을 알 수 있다.

K060 | 답 ⑤

[풀이]

로그의 성질에 의하여

주어진 함수의 방정식을 정리하면

$y=(-\ln(ax))^2=(\ln(ax))^2$

주어진 함수의 도함수는

$y' = 2(\ln(ax))\dfrac{1}{x}$

주어진 함수의 이계도함수는

$y'' = \dfrac{2(1-\ln(ax))}{x^2}$

$y'' = 0$에서 $x = \dfrac{e}{a}$

$x = \dfrac{e}{a}$의 좌우에서 y''의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 주어진 곡선은 $x = \dfrac{e}{a}$에서 변곡점을 갖는다.

변곡점 $\left(\dfrac{e}{a},\ 1\right)$이 직선 $y = 2x$ 위에 있으므로 $1 = \dfrac{2e}{a}$

$\therefore\ a = 2e$

답 ⑤

K061 | 답 ③

[풀이]

우선 함수 $f(x)$의 그래프를 그리자.

함수 $f(x)$의 그래프는 아래의 두 점을 지난다.

$\left(1,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, $(3,\ \pi)$

$x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 변곡점을 갖지 않는다.

다항함수 $f''(x)$는 연속함수이므로 $f''(1)$의 부호가 음일 수 없다. 즉, $f''(1) \geq 0$이다.

$x=1$에서 함수 $f(x)$가 아래로 볼록이고 $f'(1)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

문제에서 주어진 표를 완성하면

x	$x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	1
$f''(x)$	$+$	0 또는 $+$	$+$	0
$f(x)$	↘	$\dfrac{\pi}{2}$	↗	π

아래를 만족시키는 적당한 상수 $p(<1)$을 생각하자.

구간 $(p,\ 3)$에서 $f''(x) \geq 0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $(p,\ 3)$에서 아래로 볼록하다.

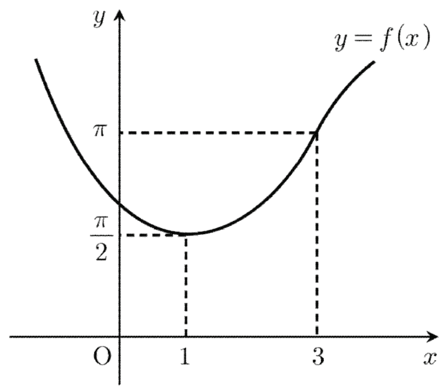
구간 $(p,\ 1)$에서 $f'(x) < 0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $(p,\ 1)$에서 감소한다.

구간 $(1,\ 3)$에서 $f'(x) > 0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $(1,\ 3)$에서 증가한다.

점 $\left(1,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$는 함수 $f(x)$의 극소점이다.

$x>3$일 때, $f''(x)$의 부호에 대한 정보가 없으므로 점 $(3,\ \pi)$가 함수 $f(x)$의 변곡점이라고 단정할 수 없다.

이제 함수 $f(x)$의 그래프 중에서 가장 간단한 것을 그리면



ㄱ. (참)

함수 $g(x)$의 도함수는

합성함수의 미분법에 의하여

$g'(x) = f'(x) \times \cos(f(x))$

$\therefore\ g'(3) = f'(3) \times \cos(f(3))$

$= 1 \times \cos\pi = -1$

ㄴ. (참)

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

구간 $(1,\ 3)$에서

$0 < f'(x) < 1$

$\dfrac{\pi}{2} < f(x) < \pi$에서

$-1 < \cos(f(x)) < 0$

보기 ㄱ에서

$g'(x) = f'(x) \times \cos(f(x))$이므로

$-1 < g'(x) < 0$

함수 $g(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고

구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하므로

평균값의 정리에 의하여

$\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c)$

인 c가 구간 $(a,\ b)$에 존재한다.

구간 $(1,\ 3)$에서 $-1 < g'(x) < 0$이므로

$-1 < g'(c) < 0$

$\therefore\ -1 < \dfrac{g(b)-g(a)}{b-a} < 0$

ㄷ. (거짓)

함수 $g(x)$의 이계도함수는

$g''(x) = -\{f'(x)\}^2\sin(f(x)) + f''(x)\cos(f(x))$

충분히 작은 양수 h에 대하여

구간 $(1-h,\ 1+h)$에서

$|f'(x)| \geq 0$, $\sin(f(x)) > 0$,

$f''(x) \geq 0$, $\cos(f(x)) \leq 0$이므로

구간 $(1-h,\ 1+h)$에서

$g''(x) \leq 0$

(단, 등호는 $x=1$일 때 성립한다.)

구간 $(1-h,\ 1+h)$에서 함수 $g(x)$의 그래프는 위로 볼록이다.
따라서 함수 $g(x)$의 그래프는 점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$을 변곡점으로 갖지 않는다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.
답 ③

K062 | 답 ⑤

[풀이]
함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\frac{1}{27}(4x^3-18x^2+24x+19)$$

함수 $f(x)$의 이계도함수는

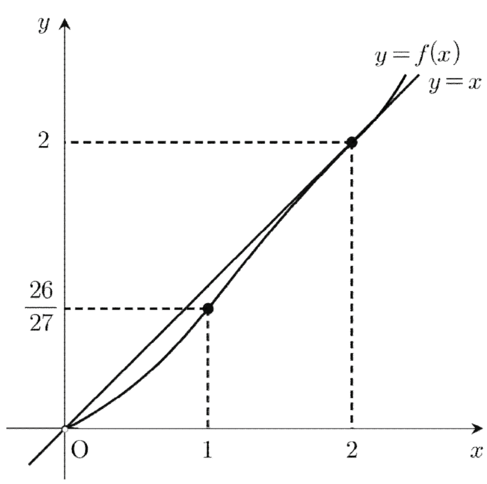
$$f''(x)=\frac{1}{27}(12x^2-36x+24)$$

$$=\frac{4}{9}(x-1)(x-2)$$

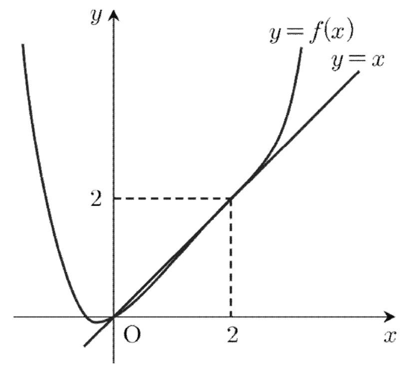
$f''(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$\left(\frac{19}{27}\right)$	$+$	$\frac{29}{27}$	$+$	1	$+$
$f''(x)$	$(+)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	(0)	⤴	$\frac{26}{27}$	↷	2	⤴

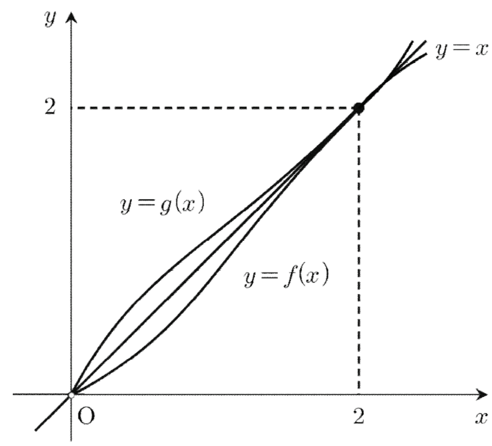
ㄱ. (참)
$x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음에서 양으로 변하므로 점 $(2,\ 2)$는 함수 $f(x)$의 변곡점이다.
ㄴ. (참)
함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $f(x)$의 정의역이 실수 전체의 집합일 때,
함수 $f(x)$의 그래프는



위의 그림에서 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은 $(0,\ 0)$과 $(2,\ 2)$이다.
따라서 방정식 $f(x)=x$의 실근 중에서 양수인 것은 $x=2$ 하나뿐이다.
ㄷ. (참)



$x\geq 2$일 때,
$|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$
미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{|f(x)-g(x)|-|f(2)-g(2)|}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2+0}\frac{f(x)-g(x)-f(2)+g(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2+0}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\lim_{x\to 2+0}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

$$=f'(2)-g'(2)$$

$$=f'(2)-\frac{1}{f'(2)}\ (\because \text{역함수의 미분법})$$

$$=0$$

$0<x<2$일 때,
$|f(x)-g(x)|=g(x)-f(x)$
미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{|f(x)-g(x)|-|f(2)-g(2)|}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{g(x)-f(x)-g(2)+f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2-0}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}-\lim_{x\to 2-0}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$= g'(2) - f'(2)$

$= \dfrac{1}{f'(2)} - f'(2)$ ($\because$ 역함수의 미분법)

$= 0$

미분계수의 정의에 의하여

함수 $|f(x) - g(x)|$는 $x = 2$에서 미분가능하다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

K063 | 답 ③

[풀이]

ㄱ. (참)

미적분의 기본정리에 의하여

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = 3$

정리하면

$F(b) = F(a) + 3$

ㄴ. (거짓)

함수 $F(x)$의 도함수는 $f(x)$이다.

$x = c$의 좌우에서 함수 $f(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x = c$에서 함수 $F(x)$는 극솟값을 갖는다. 즉, 점 $(c,\ F(c))$는 곡선 $y = F(x)$의 극점이다.

그런데 극점은 변곡점일 수 없으므로

점 $(c,\ F(c))$는 곡선 $y = F(x)$의 변곡점이 아니다.

ㄷ. (참)

보기 ㄱ과 마찬가지의 방법으로

미적분의 기본정리에 의하여

$\int_b^c f(x)dx = F(c) - F(b) = -3$

정리하면

$F(c) = F(b) - 3$

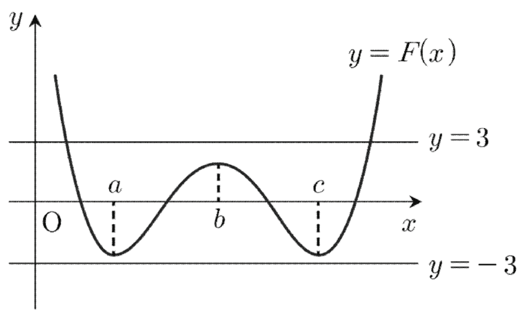
보기 ㄴ과 마찬가지의 방법으로

함수 $F(x)$는 $x = a$와 $x = b$에서 각각 극솟값과 극댓값을 갖는다.

그런데 $-3 < F(a) < 0$일 때,

$0 < F(b) < 3$이고 $-3 < F(c) < 0$

이므로, 함수 $F(x)$의 그래프는



함수 $F(x)$와 그래프와 x축은 네 점에서 만나므로 방정식 $F(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

K064 | 답 ①

[풀이]

함수 $y = f(x)$가 역함수를 가져야 하므로

$\dfrac{dy}{dx} \geq 0$

조건 (가)에서 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$\dfrac{dy}{dx} \neq 0$ 즉, $\dfrac{dy}{dx} > 0$

역함수의 미분법의 정의에서

함수 $y = f(x)$의 역함수의 도함수는 $\dfrac{dx}{dy}$이다.

조건 (가)에서 $g'(x) \leq \dfrac{1}{3}$이므로

$0 < \dfrac{dx}{dy} \leq \dfrac{1}{3}$

함수 $y = f(x)$의 도함수가 갖는 값의 범위는

$\dfrac{dy}{dx} \geq 3$ 즉, $f'(x) \geq 3$

이제 $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$로 두자.

함수 $h(x)$는 $g(x) \neq 0$인 모든 실수 x에 대하여 미분가능하다.

조건 (나)에서

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - g(x)}{(x-3)g(x)} = \lim_{x \to 3} \frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - 1}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{h(x) - 1}{x - 3} = \frac{8}{9}$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \to 3}\{h(x) - 1\} = \lim_{x \to 3} \frac{h(x) - 1}{x - 3} \times (x - 3) = \frac{8}{9} \times 0 = 0$$

함수의 연속의 정의에 의하여

$h(3) = \dfrac{f(3)}{g(3)} = 1$ 즉, $f(3) = g(3)$ $\cdots$ ㉠

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x \to 3} \frac{h(x) - 1}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{h(x) - h(3)}{x - 3} = h'(3) \text{ 즉, } h'(3) = \frac{8}{9}$$

몫의 미분법에 의하여

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$h'(3) = \frac{f'(3)g(3) - f(3)g'(3)}{\{g(3)\}^2} = \frac{8}{9} \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠과 ㉡을 연립하면

$$\frac{f'(3) - g'(3)}{g(3)} = \frac{8}{9} \quad \cdots \text{㉢}$$

그런데 두 곡선 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 교점은

직선 $y=x$ 위에 있으므로

$f(3)=g(3)=3$ ⋯㉣

㉣을 ㉢에 대입하면

$f'(3)-g'(3)=\dfrac{8}{3}$

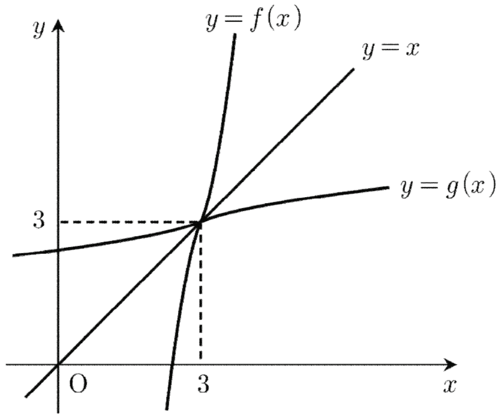
그런데 $g'(x)\le\dfrac{1}{3}$, $f'(x)\ge3$이므로

$f'(x)-g'(x)\ge\dfrac{8}{3}$

(단, 등호는 $f'(3)=3$, $g'(3)=\dfrac{1}{3}$일 때 성립한다.)

$f'(x)\ge3$이고 $f'(3)=3$이므로

곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 $(3,\ 3)$이다.



함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$x=3$을 대입하면 $f(3)=27+9a+3b+c=3$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$x=3$을 대입하면 $f'(3)=27+6a+b=3$

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x)=6x+2a$

$x=3$을 대입하면 $f''(3)=18+2a=0$

a, b, c에 대한 연립방정식을 풀면

$a=-9$, $b=30$, $c=-33$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^3-9x^2+30x-33$

$\therefore\ f(1)=-11$

답 ①

[참고1]

조건 (나)에서 주어진 식을 다음과 같이 변형할 수도 있다.

함수의 극한에 대한 성질과 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)-g(x)+g(3)}{(x-3)g(x)}$$

$$=\lim_{x\to3}\left\{\frac{f(x)-f(3)}{x-3}-\frac{g(x)-g(3)}{x-3}\right\}\times\frac{1}{g(x)}$$

$$=\frac{f'(3)-g'(3)}{g(3)}$$

[참고2]

역함수의 미분법을 이용하여 $f'(3)$의 값을 구할 수도 있다.

$f(3)=g(3)=3$, $f'(3)-g'(3)=\dfrac{8}{3}$이 성립한다.

역함수의 미분법에 의하여

$g'(3)=\dfrac{1}{f'(3)}$이므로 $f'(3)-\dfrac{1}{f'(3)}=\dfrac{8}{3}$

정리하면 $3\{f'(3)\}^2-8f'(3)-3=0$

좌변을 인수분해하면 $\{3f'(3)+1\}\{f'(3)-3\}=0$

풀면 $f'(3)=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $f'(3)=3$

$f'(x)\ge3$이므로 $f'(3)=3$

[참고3]

부정적분을 이용하여 함수 $f(x)$의 방정식을 구할 수도 있다.

$f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)$의 이계도함수는 $f''(x)=6(x-3)$

($\because$ 점 $(3,\ 3)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.)

부정적분의 정의에 의하여

$f'(x)=\displaystyle\int f''(x)dx=3x^2-18x+C_1$

그런데 $f'(3)=3$이므로

$f'(3)=-27+C_1=3$에서 $C_1=30$

도함수 $f'(x)$의 방정식은

$f'(x)=3x^2-18x+30$

부정적분의 정의에 의하여

$f(x)=\displaystyle\int f'(x)dx=x^3-9x^2+30x+C_2$

그런데 $f(3)=3$이므로 $f(3)=36+C_2=3$에서 $C_2=-33$

함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x)=x^3-9x^2+30x-33$

[참고4]

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 구할 수도 있다.

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$x=3$을 대입하면

$f(3)=27+9a+3b+c=3$

즉, $9a+3b+c=-24$ ⋯㉠

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$x=3$을 대입하면

$f'(3)=27+6a+b=3$

즉, $6a+b=-24$ ⋯㉡

그런데 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 3$이므로

$3x^2 + 2ax + b - 3 \geq 0$

방정식 $3x^2 + 2ax + b - 3 = 0$의 판별식을 D라고 하면

$D/4 = a^2 - 3(b-3) = (a+9)^2 \leq 0$ ($\because$ ㉡)

a는 실수이므로 $a = -9$

이를 ㉡에 대입하면 $b = 30$

이를 ㉠에 대입하면 $c = -33$

함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 30x - 33$

[참고5]

$f(3)$, $g(3)$의 값을 다음과 같이 구할 수도 있다.

$f(x)$와 $g(x)$가 서로 역함수이므로

$f(3) = g(3) = \alpha$라고 하면 $f(\alpha) = 3$

$f(x)$가 증가함수이므로

$\alpha > 3$이면 $f(\alpha) > f(3)$ 즉, $3 > \alpha$가 되어 모순이다.

$\alpha < 3$이면 $f(\alpha) < f(3)$ 즉, $3 < \alpha$가 되어 모순이다.

$\therefore$ $f(3) = g(3) = 3$

K065 | 답 ⑤

[풀이]

우선 함수 $f(x)$의 그래프를 그리자.

함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

함수 $f(x)$의 치역은 음이 아닌 실수 전체의 집합이다.

함수 $f(x)$의 그래프는 원점을 지난다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = -ke^{-x}(x^2 - 2x) = -ke^{-x}x(x-2)$

방정식 $f'(x) = 0$을 풀면 $x = 0$ 또는 $x = 2$

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x) = ke^{-x}(x^2 - 4x + 2)$

이차방정식의 근의 공식에 의하여

방정식 $f''(x) = 0$을 풀면 $x = 2 - \sqrt{2}$ 또는 $x = 2 + \sqrt{2}$

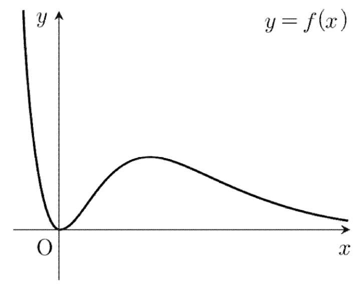
x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$2+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	변곡점	↗	극대	↘	변곡점	↘

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{kx^2}{e^x} = 0$에서

함수 $f(x)$의 그래프는 x축을 점근선으로 갖는다.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} kx^2 e^x = \infty$

함수 $f(x)$의 그래프는



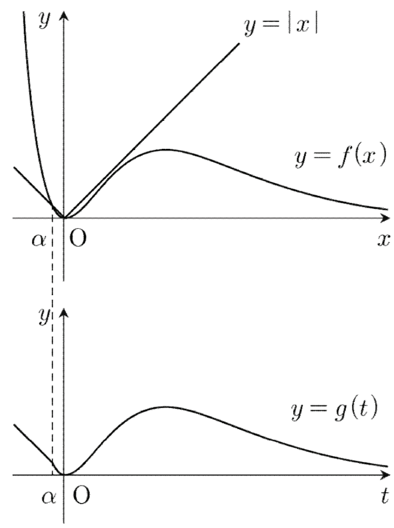
함수 $g(t)$의 방정식은

$g(t) = \begin{cases} f(t) & (f(t) \leq |t|) \\ |t| & (f(t) > |t|) \end{cases}$

(1) 두 함수 $y = f(x)$, $y = |x|$의 그래프의 교점의 개수가 1인 경우

교점의 x좌표를 $\alpha(\alpha < 0)$라고 두자.

함수 $g(t)$의 그래프는

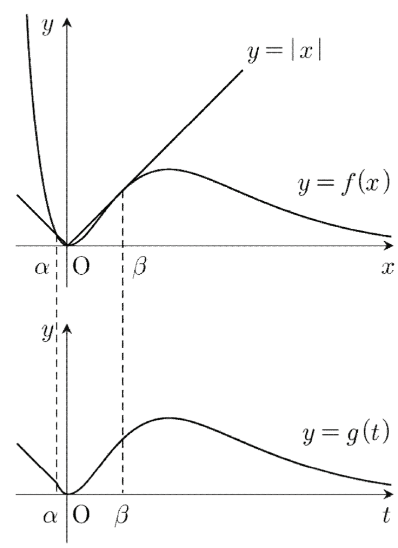


함수 $g(t)$는 $x = \alpha$에서 미분가능하지 않다.

(2) 두 함수 $y = f(x)$, $y = |x|$의 그래프의 교점의 개수가 2인 경우

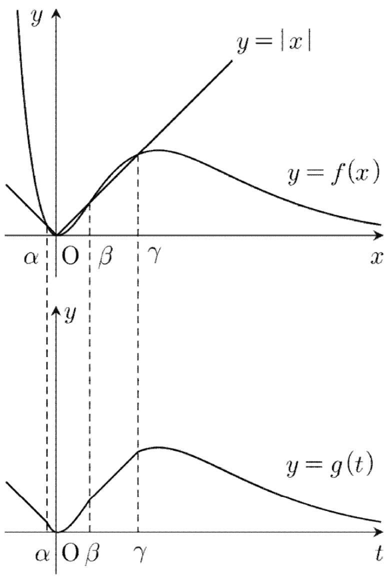
두 교점의 x좌표를 각각 α, $\beta(\alpha < 0 < \beta)$라고 두자.

함수 $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$는 $x = \alpha$에서 미분가능하지 않다.

(3) 두 함수 $y=f(x)$, $y=|x|$의 그래프의 교점의 개수가 3인 경우
세 교점의 x좌표를 각각 α, β, $\gamma(\alpha<0<\beta<\gamma)$라고 두자.
함수 $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$에서 미분가능하지 않다.
함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않는 경우는 (1), (2)이다.
이제 함수 $f(x)=kx^2e^{-x}$의 그래프가 직선 $y=x$에 접할 때의 k의 값을 구하자.
접점의 x좌표를 s라고 하면
$f(s)=ks^2e^{-s}=s$
$s\neq 0$이므로 $kse^{-s}=1$ $\cdots$㉠
$f'(s)=-kse^{-s}(s-2)=1$ $\cdots$㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $s=1$
이를 ㉠에 대입하면 $k=e$
$0<k\leq e$일 때,
함수 $g(t)$의 미분불가능한 점의 개수는 1이다.
$k>e$일 때,
함수 $g(t)$의 미분불가능한 점의 개수는 3이다.
답 ⑤

K066 |답 ③

[풀이]
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=(n-x)x^{n-1}e^{-x}$
함수 $f(x)$의 이계도함수는
$f''(x)=(x^2-2nx+n^2-n)x^{n-2}e^{-x}$
ㄱ. (참)
지수법칙에 의하여
$f\left(\frac{n}{2}\right)=\left(\frac{n}{2}\right)^n e^{-\frac{n}{2}}=f'\left(\frac{n}{2}\right)$
ㄴ. (참)
$f'(n)=0$
$f''(n)=-n^{n-1}e^{-n}<0$
함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. (거짓)
n이 3 이상의 자연수일 때,
충분히 작은 양수 h에 대하여
구간 $(-h,\ h)$에서
$x^2-2nx+n^2-n\approx n^2-n>0$
(1) n이 3 이상의 홀수인 경우
$x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호는 음에서 양으로 변한다.
이때, 점 $(0,\ 0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.
(2) n이 4 이상의 짝수인 경우
$x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호는 양에서 양으로 변하지 않는다. 이때, 점 $(0,\ 0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 아니다.
(1), (2)에서 주어진 명제는 거짓이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.
답 ③

K067 |답 ①

[풀이]
ㄱ. (참)
조건 (나)에서 주어진 항등식을 변형하면
모든 실수 x에 대하여
$f(-x)=-f(x)$
조건 (가)에 의하여 $f(x)\neq 1$이므로
$f(-x)\neq -1$
$x=-t$로 두고 위의 식을 정리하면
$f(t)\neq -1$
따라서 모든 실수 x에 대하여
$f(x)\neq -1$
ㄴ. (거짓)
조건 (다)에서 주어진 항등식을 변형하면
$f'(x)=\{1+f(x)\}\{1-f(x)\}$ ($\because$ 조건(가))
$f(x)\neq 1$이고 $f(x)\neq -1$이므로 $f'(x)\neq 0$
$f'(x)<0$이라 하고 부등식
$\{1+f(x)\}\{1-f(x)\}<0$
을 풀면
$f(x)<-1$ 또는 $f(x)>1$
그런데 조건 (나)에서 주어진 항등식에 $x=0$을 대입하면
$f(0)+f(0)=0$ 즉, $f(0)=0$
이므로 이는 가정에 모순이다.
따라서 $f'(x)>0$이다.

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.
이때, $f(x)$의 치역을 구하면
$\{y \mid -1<y<1\}$
ㄷ. (거짓)
조건 (다)에서 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여
함수 $f(x)$의 이계도함수를 구하면
$f''(x)=-2f(x)f'(x)$
$f'(x)>0$이므로
$f''(x)=0$과 필요충분조건은 $f(x)=0$이다.
그런데 $f(x)$는 증가함수이므로
구간 $(-\infty,\ 0)$에서 $f(x)<0$이고,
구간 $(0,\ \infty)$에서 $f(x)>0$이다.
방정식 $f(x)=0$의 실근은 $x=0$이므로
방정식 $f''(x)=0$의 실근은 $x=0$이다.
$x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호는 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 변곡점을 가진다. 이때, 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록이고, 구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.
답 ①

[참고] +미적분2(여러 가지 함수의 부정적분)
함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.
조건 (다)에서 주어진 항등식을 변형하면

$$\frac{f'(x)}{1+f(x)}+\frac{f'(x)}{1-f(x)}=2$$

$$\int\frac{f'(x)}{1+f(x)}dx+\int\frac{f'(x)}{1-f(x)}dx=\int 2dx$$

$$\ln|1+f(x)|-\ln|1-f(x)|=2x+C \qquad \cdots(*)$$

(단, C는 적분상수)
$(*)$에 $x=0$을 대입하면
$\ln|1+f(0)|-\ln|1-f(0)|=C$ 풀면 $C=0$
이를 $(*)$에 대입하면
$\ln|1+f(x)|-\ln|1-f(x)|=2x$
정리하면

$$\ln\left|\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right|=2x$$

로그의 정의에 의하여

$$\left|\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right|=e^{2x}$$

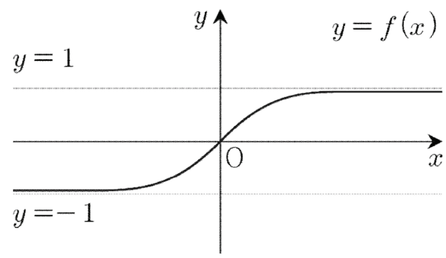
그런데 $-1<f(x)<1$이므로

$$\frac{1+f(x)}{1-f(x)}=e^{2x}$$

정리하면

$$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



K068 | 답 216

[풀이1]
평행이동의 관점에서 $a=0$으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.
다시 말하면 a가 0이 아닌 실수라고 해도 아래와 동일한 결과를 얻는다.
문제에서 주어진 조건에서 $\beta-\alpha=6\sqrt{3}$ (양수)이고,
조건 (나)에서 α, β는 모두 양수이므로 $0<\alpha<\beta$이다.
조건 (가)에 의하여

$$f(x)=\frac{g(x)}{x}\ (\text{단, } x>0)$$

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}\ (\text{단, } x>0) \qquad \cdots(*)$$

조건 (나)에 의하여
양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가
$x=\alpha$와 $x=\beta$에서 극값을 가지므로

$$f'(\alpha)=\frac{\alpha g'(\alpha)-g(\alpha)}{\alpha^2}=0,\ f'(\beta)=\frac{\beta g'(\beta)-g(\beta)}{\beta^2}=0$$

위의 두 식을 정리하면

$$g'(\alpha)=\frac{g(\alpha)}{\alpha},\ g'(\beta)=\frac{g(\beta)}{\beta} \qquad \cdots㉠$$

조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서
동일한 값 M을 가지므로

$$f(\alpha)=\frac{g(\alpha)}{\alpha}=M,\ f(\beta)=\frac{g(\beta)}{\beta}=M \qquad \cdots㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$$g'(\alpha)=M,\ g'(\beta)=M \qquad \cdots㉢$$

㉠, ㉢에 의하여

$$g'(\alpha)=\frac{g(\alpha)-0}{\alpha-0}=M=\frac{g(\beta)-0}{\beta-0}=g'(\beta)$$

두 점 $(0,\ 0)$, $(\alpha,\ g(\alpha))$를 잇는 직선의 기울기와
두 점 $(0,\ 0)$, $(\beta,\ g(\beta))$를 잇는 직선의 기울기는
M으로 같으므로, 세 점
$(0,\ 0)$, $(\alpha,\ g(\alpha))$, $(\beta,\ g(\beta))$
는 한 직선 위에 있다. 이 직선을 l이라고 하자.
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(\alpha,\ g(\alpha))$에서의 접선의 기울기와
두 점 $(0,\ 0)$, $(\alpha,\ g(\alpha))$를 잇는 직선의 기울기는
M으로 같으므로, 원점은 곡선 $y=g(x)$ 위의 점
$(\alpha,\ g(\alpha))$에서의 접선 위에 있다. 이때, 접선은 l이다.

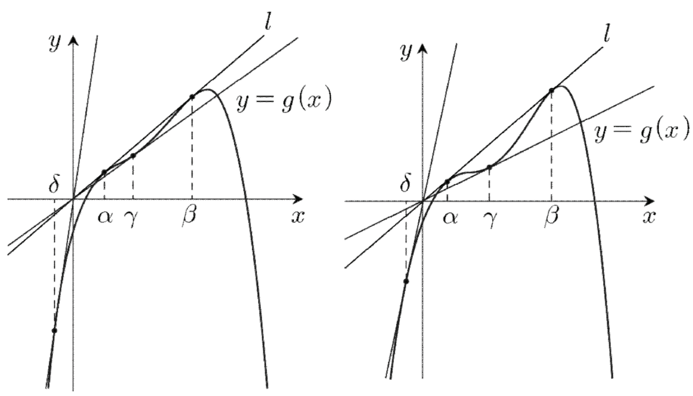
마찬가지의 이유로 점 $(\beta,\ g(\beta))$에서의 접선은 l이다.
따라서 직선 l은 두 점 $(\alpha,\ g(\alpha))$, $(\beta,\ g(\beta))$에서
곡선 $y=g(x)$에 각각 접한다.
한편 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고
함수 $f(x)$는 열린구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 미분가능하고
$f(\alpha)=f(\beta)(=M)$이므로 롤의 정리에 의하여
$f'(\gamma)=0$ (단, $\alpha<\gamma<\beta$)
인 γ가 적어도 하나 이상 존재한다.
방정식 $f'(x)=0$과 필요충분조건은
사차방정식 $xg'(x)-g(x)=0$(즉, ((*)의 분자)$=0$)
이므로 인수정리에 의하여 (*)는

$$f'(x)=\frac{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}{x}$$

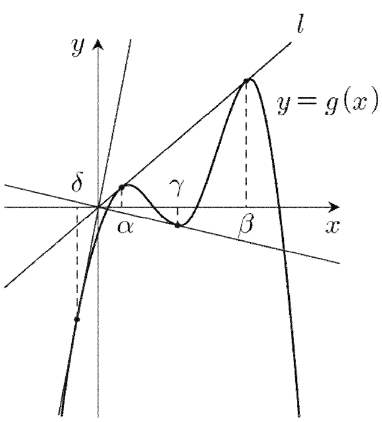
(단, $0<\alpha<\gamma<\beta$, γ는 0이 아닌 실수이다.)
$f'(\gamma)=0$, $f'(\delta)=0$이므로 (*)에서

$$g'(\gamma)=\frac{g(\gamma)-0}{\gamma-0},\ g'(\delta)=\frac{g(\delta)-0}{\delta-0}$$

곡선 $y=g(x)$ 위의 두 점 $(\gamma,\ g(\gamma))$, $(\delta,\ g(\delta))$에서의
각각의 접선은 모두 원점을 지난다.
최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $g(x)$의 그래프의
개형으로 아래의 2가지의 경우가 가능하다.
(경우1) 함수 $g(x)$가 극소점을 갖지 않는 경우



(경우2) 함수 $g(x)$가 극소점을 갖는 경우



위의 두 경우 모두에 대해서 δ는 음수이다.
$f'(\delta)=0$, $f''(\delta)>0$(←[참고2])
이므로 함수 $f(x)$는 $x=\delta$에서 극솟값을 갖는다.
함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 3이므로
사차함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 1이다.
따라서 (경우2)는 제외된다.
(경우1)에서 직선 l은 두 점 $(\alpha,\ g(\alpha))$, $(\beta,\ g(\beta))$에서
곡선 $y=g(x)$에 각각 접하므로

$$Mx-g(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

정리하면

$$g(x)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+Mx$$

함수 $g(x)$의 도함수는

$$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+M$$

계산을 줄이기 위하여 함수 $g(x)$의 그래프를
x축의 방향으로 $-\dfrac{\alpha+\beta}{2}$만큼 평행이동시켜서
함수 $h(x)$의 그래프와 일치한다고 하자.
함수 $g(x)$가 극대점만을 가지므로
함수 $h(x)$도 극대점만을 가지면 된다.
함수 $h(x)$의 도함수는

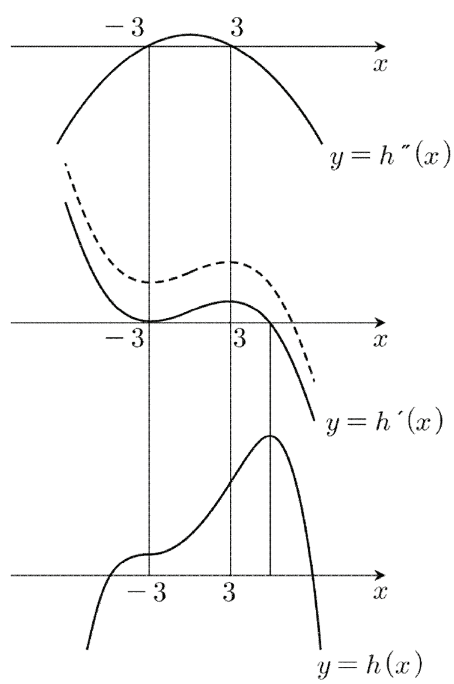
$$h'(x)=-4x\left(x+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)+M$$

$$=-4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})+M\ (\because \beta-\alpha=6\sqrt{3})$$

함수 $h(x)$의 이계도함수는

$$h''(x)=-12(x+3)(x-3)$$

$h''(x)=0$이면 $x=-3$ 또는 $x=3$
$x=-3$의 좌우에서 $h''(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $h'(x)$는 $x=-3$에서 극솟값을 갖는다.
$x=3$의 좌우에서 $h''(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $h'(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 갖는다.
조건 (다)를 만족시키는 세 함수
$h(x)$, $h'(x)$, $h''(x)$
의 그래프는 다음과 같다.



함수 $h(x)$가 극대점만을 가지기 위해서는

$h'(-3)=-216+M\geq 0$

$\therefore\ M\geq 216$

답 216

[참고1]

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(\alpha,\ g(\alpha))$에서의 접선을 l_1이라고 하면

l_1: $y=g'(\alpha)(x-\alpha)+g(\alpha)$

조건 (나)에서 $g(\alpha)=M\alpha$, $g'(\alpha)=M$이므로

l_1: $y=M(x-\alpha)+M\alpha$

정리하면

l_1: $y=Mx$ (원점을 지난다.)

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(\beta,\ g(\beta))$에서의 접선을 l_2라고 하면

마찬가지의 방법으로

l_2: $y=Mx$ (원점을 지난다.)

두 직선 l_1, l_2가 일치하므로 세 점

$(0,\ 0)$, $(\alpha,\ g(\alpha))$, $(\beta,\ g(\beta))$

는 한 직선 위에 있다.

그리고 직선 l_1(그리고 l_2)는 두 점

$(\alpha,\ g(\alpha))$, $(\beta,\ g(\beta))$

에서 곡선 $y=g(x)$에 각각 접한다.

[참고2]

$$f'(x)=\frac{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}{x}$$

(단, $0<\alpha<\gamma<\beta$, $\gamma<0$)

$\ln|f'(x)|$

$=\ln|x-\alpha|+\ln|x-\beta|+\ln|x-\gamma|+\ln|x-\delta|-\ln|x|$

양변을 미분하면

$$\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}+\frac{1}{x-\delta}-\frac{1}{x}$$

정리하면

$$f''(x)=\frac{(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}{x}+\frac{(x-\alpha)(x-\gamma)(x-\delta)}{x}$$
$$+\frac{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\delta)}{x}+\frac{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}{x}$$
$$-\frac{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}{x^2}$$

$$f''(\delta)=\frac{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}{\delta}>0$$

$f'(\delta)=0$, $f''(\delta)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\delta$에서 극솟값을 갖는다.

혹은 $x=\delta$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$가 $x=\delta$에서 극솟값을 갖는다고 해도 좋다.

[참고3]

M의 범위를 다음과 같이 구해도 좋다.

함수 $g(x)$의 도함수는

$$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+M$$

계산을 줄이기 위하여 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=k$로 두자.

문제에서 주어진 식 $\beta-\alpha=6\sqrt{3}$과 연립하면

$\alpha=k-3\sqrt{3}$, $\beta=k+3\sqrt{3}$

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=-4(x-k+3\sqrt{3})(x-k-3\sqrt{3})(x-k)+M$

함수 $g(x)$의 이계도함수는

$g''(x)=-12(x-k-3)(x-k+3)$

$g''(x)=0$에서 $x=k+3$ 또는 $x=k-3$

$g'(k-3)=-216+M\geq 0$

$\therefore\ M\geq 216$

[참고4]

M의 범위를 다음과 같이 구해도 좋다.

함수 $g(x)$의 도함수는

$$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+M$$

$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\alpha-6\sqrt{3})(x-\alpha-3\sqrt{3})+M$

$(\because \beta=\alpha+6\sqrt{3})$

함수 $g(x)$의 이계도함수는

$g''(x)=-12(x-\alpha-3\sqrt{3}+3)(x-\alpha-3\sqrt{3}-3)$

$g''(x)=0$에서 $x=\alpha+3\sqrt{3}-3$ 또는 $x=\alpha+3\sqrt{3}+3$

$g'(\alpha+3\sqrt{3}-3)=-216+M\geq 0$

$\therefore\ M\geq 216$

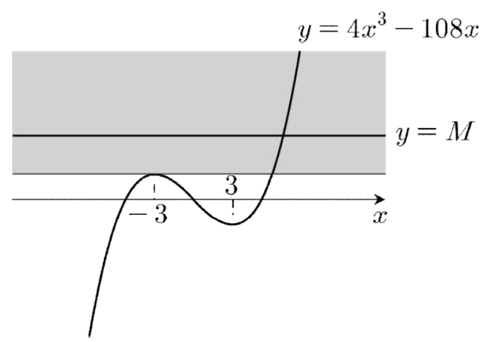
[참고5]

$h'(x)=-4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})+M$에 대하여

방정식 $h'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1이므로

곡선 $y=4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})$과 직선 $y=M$의

교점의 개수가 1 또는 2인 M의 범위를 구해도 좋다.



위의 그림에서 색칠된 부분에 직선 $y=M$이 포함되면 된다.

(단, 경계포함) $M\geq 216$

[풀이2]
평행이동의 관점에서 $a=0$으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다. 다시 말하면 a가 0이 아닌 실수라고 해도 아래와 동일한 결과를 얻는다.
문제에서 주어진 조건에서 $\beta-\alpha=6\sqrt{3}$(양수)이고,
조건 (나)에서 α, β는 모두 양수이므로 $0<\alpha<\beta$이다.
조건 (가)에 의하여

$$f(x)=\frac{g(x)}{x}(\text{단, } x>0) \qquad \cdots(*1)$$

조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서
동일한 값 M을 가지므로
$f(\alpha)=f(\beta)=M$ 즉, $M-f(\alpha)=M-f(\beta)=0$
인수정리에 의하여
$M-f(x)$의 분자는 $x-\alpha$와 $x-\beta$를 인수로 가지므로

$$M-f(x)=\frac{Mx-g(x)}{x}=\frac{(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)}{x}$$

(단, $Q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이다.)
함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=-\frac{(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)}{x}+M(\text{단, } x>0)$$

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=-\frac{2x-\alpha-\beta}{x}Q(x)-\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{x}Q'(x)$$
$$+\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{x^2}Q(x) \qquad \cdots㉠$$

조건 (나)에 의하여 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 극값을 가지므로
$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$
이를 ㉠에 대입하면

$$f'(\alpha)=-\frac{\alpha-\beta}{\alpha}Q(\alpha)=0 \text{ 즉, } Q(\alpha)=0$$

$$f'(\alpha)=-\frac{\beta-\alpha}{\beta}Q(\beta)=0 \text{ 즉, } Q(\beta)=0$$

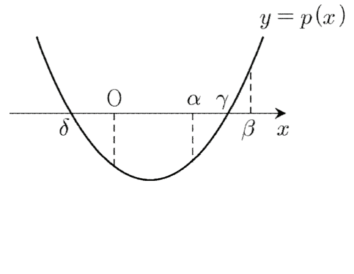
인수정리에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=-\frac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x}+M(\text{단, } x>0) \quad \cdots(*2)$$

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=-\frac{(x-\alpha)(x-\beta)(3x^2-(\alpha+\beta)x-\alpha\beta)}{x^2}$$

$p(x)=3x^2-(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$로 두자.
$p(0)=-\alpha\beta<0$, $p(\alpha)=2\alpha(\alpha-\beta)<0$,
$p(\beta)=2\beta(\beta-\alpha)>0$이므로 이차함수 $p(x)$의 그래프는 다음과 같다.



사이값 정리에 의하여 $p(\gamma)=p(\delta)=0$인 γ, δ가 존재한다.
(단, $\alpha<\gamma<\beta$, $\delta<0$)
함수 $f'(x)$의 방정식은

$$f'(x)=-\frac{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}{x^2}$$

$f'(\delta)=0$, $f''(\delta)>0$(←[참고2])
이므로 함수 $f(x)$는 $x=\delta$에서 극솟값을 갖는다.
함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 3이므로
사차함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 1이다.
(*1), (*2)에 의하여

$$\frac{g(x)}{x}=-\frac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x}+M(\text{단, } x>0)$$

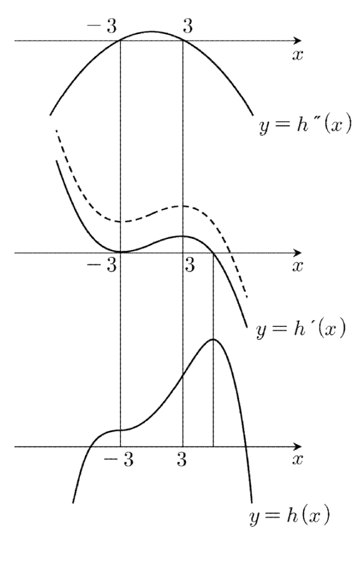
정리하면 $g(x)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+Mx$
함수 $g(x)$의 도함수는

$$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+M$$

계산을 줄이기 위하여 함수 $g(x)$의 그래프를
x축의 방향으로 $-\dfrac{\alpha+\beta}{2}$만큼 평행이동시켜서
함수 $h(x)$의 그래프와 일치한다고 하자.
함수 $g(x)$가 극대점만을 가지므로 함수 $h(x)$도 극대점만을 가지면 된다. 함수 $h(x)$의 도함수는

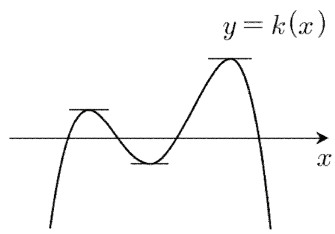
$$h'(x)=-4x\left(x+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)+M$$
$$=-4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})+M(\because \beta-\alpha=6\sqrt{3})$$

함수 $h(x)$의 이계도함수는
$h''(x)=-12(x+3)(x-3)$
$h''(x)=0$이면 $x=-3$ 또는 $x=3$
$x=-3$의 좌우에서 $h''(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $h'(x)$는 $x=-3$에서 극솟값을 갖는다.
$x=3$의 좌우에서 $h''(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $h'(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 갖는다.
조건 (다)를 만족시키는 세 함수 $h(x)$, $h'(x)$, $h''(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $h(x)$가 극대점만을 가지기 위해서는
$h'(-3)=-216+M\geq 0$
$\therefore\ M\geq 216$
답 216

[참고6]
함수 $g(x)$의 극점의 개수가 1임을 다음과 같이 보여도 좋다.
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=\dfrac{xg'(x)-g(x)}{x^2}$ (단, $x>0$)
방정식 $f'(x)=0$의 필요충분조건은
방정식 $xg'(x)-g(x)=0$이다.
이제 $k(x)=xg'(x)-g(x)$로 두자.(단, $x>0$)
함수 $k(x)$의 도함수는
$k'(x)=xg''(x)$
x는 양수이므로 방정식 $k'(x)=0$과 필요충분조건은
방정식 $g''(x)=0$이다.
이차방정식 $g''(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수의
최댓값은 2이다.
이상을 정리하면 다음과 같다.
$f'(x)=0 \Leftrightarrow k(x)=0$
$k'(x)=0 \Leftrightarrow g''(x)=0$
사차방정식 $k(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4라고 가정하자.



함수 $k(x)$의 극점의 개수는 3이므로
방정식 $k'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
그런데 이차방정식 $g''(x)=0$은 서로 다른 3개의 실근을 가질 수 없으므로 이는 가정에 모순이다.
따라서 방정식 $k(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3 이하이다.
필요충분조건에 의하여
방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3 이하이다.
함수 $f(x)$의 극점의 개수가 3 이하이므로
조건 (다)에 의하여 사차함수 $g(x)$의 극점의 개수는 1이다.

K069 | 답 ④

[풀이1]
진수의 조건에서
$5-x>0$, $x+4>0$이므로 $-4<x<5$
함수 $f(x)$의 정의역은
$\{x \mid -4<x<5\}$ $\cdots(*)$
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=\dfrac{1}{2\ln 3}\times\dfrac{-1}{5-x}+\dfrac{1}{\ln 3}\times\dfrac{1}{x+4}$
$=\dfrac{3x-6}{(2\ln 3)(x-5)(x+4)}$
$f'(x)=0$을 풀면 $x=2$
$x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로
$f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖는다.
이때, 로그의 성질을 이용하여 극댓값을 구하면
$f(2)=\log_9 108=\log_9(3^3\times 4)$
$=\dfrac{3}{2}\log_3 3+\log_9 4=\dfrac{3}{2}+\log_3 2$
$\lim\limits_{x\to -4+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 5-} f(x)=-\infty$이므로
함수 $f(x)$의 최댓값은 $\dfrac{3}{2}+\log_3 2$이다.
답 ④

[풀이2]
진수의 조건에서
$5-x>0$, $x+4>0$이므로 $-4<x<5$
함수 $f(x)$의 정의역은
$\{x \mid -4<x<5\}$ $\cdots(*)$
로그의 성질에 의하여
$\log_9(5-x)+\log_3(x+4)=\log_9(5-x)(x+4)^2$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=\log_9(5-x)(x+4)^2$
정의역이 $(*)$인 함수 $g(x)$의 방정식을
$g(x)=(5-x)(x+4)^2$
함수 $g(x)$의 도함수는
$g'(x)=-3(x+4)(x-2)$
$g'(x)=0$에서 $x=2$
$x=2$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로
함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖는다. 이때, 극댓값은 108이다.
$\lim\limits_{x\to -4+} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 5-} g(x)=0$이므로
함수 $g(x)$의 최댓값은 108이다.
밑이 1 보다 큰 로그함수 $y=\log_9 x$는 양의 실수전체의 집합에서 증가하므로 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값을 갖는다.
따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은
$\log_9 g(2)=\log_9 108=\dfrac{3}{2}+\log_3 2$
답 ④